

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

PUBLICACIONES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS

VOL. VI

NÚM. 1

SERIE SEGUNDA

26

REVISTA

DEPARTAMENTO DE ELECTROTECNIA

Juan Manuel Barcala. — Relaciones de amplitud y fase en los circuitos eléctricos 5

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Elizabeth Groza de Dolnik. — Nuevo método de iteración para la resolución de ecuaciones 29



479



FACULTAD DE CIENCIAS

FISICOMATEMATICAS

PUBLICACIONES

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

RECTORADO Y CONSEJO SUPERIOR

Rector: Dr. José Peco.

Secretario General: Dr. Carlos Federico García.

FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS

Decano: Ing. Alberto Gray.

Secretario: Ing. Ruben A. Salomone.

SERIE SEGUNDA

26

REVISTA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

PUBLICACIONES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS

VOL. VI

NÚM. 1

SERIE SEGUNDA

26

REVISTA

DEPARTAMENTO DE ELECTROTECNIA

Juan Manuel Barcala. — Relaciones de amplitud y fase en los circuitos eléctricos 5

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Elizabeth Groza de Dollński. — Nuevo método de iteración para la resolución de ecuaciones 29

*Se ha hecho el depósito de Ley.
Es propiedad de la Facultad de
Ciencias Fisicomatemáticas.*

RELACIONES DE AMPLITUD Y FASE EN LOS CIRCUITOS ELECTRICOS

ING. JUAN MANUEL BARCALA

1. **Generalidades.** — El tema que se trata en el presente trabajo es de gran importancia en los actuales sistemas de Radio comunicaciones, Televisión, Servomecanismos, etc., en los que la señal o información debe atravesar una red de circuitos eléctricos y donde cada una de sus mallas individuales produce un efecto definido sobre la amplitud y la fase de la misma.

En los comienzos de la radio, las relaciones entre amplitud y fase en un circuito no fueron consideradas, porque las señales a amplificar eran en su mayoría de audio frecuencia y en ellas la distorsión de fase no es un problema de fundamental importancia. En cambio en la etapa modulada de un transmisor, la fase comienza a tener ya alguna importancia por la deformación que introduce en las bandas laterales.

En las señales de televisión, pulsos de formas definidas, que en general pueden considerarse como formadas por la superposición de ondas sinusoidales de amplitudes y fases adecuadas, es de fundamental importancia el mantener las relaciones correctas entre estos parámetros de cada componente que atraviesa el sistema, para que la forma de onda de salida sea idéntica a la de entrada.

La rotación de fase y la atenuación en un servomecanismo o en un sistema de regulación, juegan un papel importantísimo en su estabilidad y respuesta, razón por la cual el conocimiento de estas dos magnitudes y sus relaciones es conveniente.

Se deduce de lo antedicho que estas relaciones en un circuito o sistema, constituyen un punto vital y es por eso que en los últimos tiempos se las ha estudiado en forma intensa, llegando a desarrollarse expresiones que aunque complejas en su aplicación, resuelven el problema.

Este puede ser planteado concretamente en la siguiente forma: conocida la amplitud, en función de la frecuencia, de un circuito,

¿es posible conocer o determinar la fase del circuito en función de la frecuencia?

Tomando otras magnitudes tales como la resistencia $R(\omega)$ y la reactancia $X(\omega)$ de una impedancia, que pueden relacionarse fácilmente con la amplitud y con la fase, el problema anterior se enunciaría: dada la resistencia $R(\omega)$ de un circuito, ¿es posible conocer su reactancia $X(\omega)$? Desde un punto de vista matemático, recordando que toda función de impedancia $Z(\omega)$ tiene parte real e imaginaria, dadas respectivamente por $R(\omega)$ y $X(\omega)$, se puede decir: conocida la parte real o la parte imaginaria de una función de impedancia, ¿queda determinada la parte imaginaria o la parte real respectivamente?

Felizmente este problema ha sido resuelto, si bien es cierto no en forma general, pero si, con algunas restricciones que los circuitos las cumplen en gran parte. Es verdad que no existe una única relación entre amplitud y fase o parte real e imaginaria en un circuito de dos pares de terminales (cuadripolos) o en una impedancia de un par de terminales (dipolo). Sin embargo, hay una relación única entre estas magnitudes cuando el circuito es del tipo llamado de mínima fase, para el primer caso y de mínima reactancia para el segundo.

Más adelante se definirá lo que se entiende por circuitos de mínima fase y mínima reactancia. En estos circuitos si la atenuación o la parte real se elige arbitrariamente, la fase o la parte imaginaria queda determinada. La recíproca también se cumple.

Un circuito de mínima fase, es aquel que tiene la mínima rotación de fase compatible con el número de elementos que pueden almacenar energía en el mismo. La gran mayoría de los circuitos que se usan son de mínima fase.

Las relaciones entre parte real y la parte imaginaria de un circuito comienzan a estudiarse ya desde el año 1925. Carson en su libro «Electric Circuit Theory», en la pág. 180 dice: 'el comportamiento de un circuito bajo todas las condiciones queda completamente determinado, si se conoce ya sea, la componente real o la componente imaginaria de la admitancia o de la impedancia complejas, en todo el rango de frecuencia». Ya acá se admitía entonces, que solamente era necesario conocer una de ellas para que la otra quedase automáticamente determinada.

Más tarde, Lee, en un trabajo publicado en «Journal Mathema-

tics and Physics»⁽¹⁾ demuestra, que la conductancia y susceptancia de la admitancia de un circuito, son transformadas de Hilbert y usa estas transformadas para calcular la parte imaginaria, conocida la parte real y viceversa. También establece relaciones entre el módulo y la fase de una admitancia.

Bayard en su artículo ⁽²⁾ publicado en el año 1935 discute los requisitos de los circuitos de mínima fase y establece las relaciones entre parte real y parte imaginaria de una impedancia.

También Bode en su libro «Network Analysis and Feedback Amplifier Design», da soluciones al problema de relación entre amplitud y fase en forma de ecuaciones analíticas y también da un procedimiento gráfico que permite hallar una componente conociendo la otra.

En este trabajo se tratará de dar las ecuaciones que permitan determinar la función analítica de la impedancia $Z(p)$ conocidas ya sea $R(\omega)$ o $X(\omega)$, en forma de expresiones analíticas.

Los resultados obtenidos pueden extenderse fácilmente a la función de transferencia.

2. Propiedades de las impedancias. — Se darán aquí las principales propiedades de una impedancia que pueden aplicarse sin dificultad, también a las admitancias.

1) La impedancia $Z(p)$ es una función racional si la malla a la que pertenece está formada por elementos concentrados, se pueda expresar como la relación de dos polinomios

$$Z(p) = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0} \quad [1]$$

para que la expresión [1] represente una impedancia físicamente realizable, hay que imponer ciertas condiciones. Los coeficientes $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_n$, son funciones de los parámetros R, L y C que tenga el sistema y deben por lo tanto ser cantidades reales pero

(1) Y. W. Lee: «Synthesis of Electrical Network by means of the Fourier transforms of Laguerre's Function». Journal Mathematics and Physics, Vol. 11, 1931-1932, pág. 83.

(2) M. Bayard: «Relations entre les parties réelles et imaginaires des impedances et détermination des impedances en fonction de l'une des parties». Revue Générale de L'Electricité. Vol. 37, N° 21, año 1935, pág. 659.

no necesariamente positivas, a menos que el circuito sea pasivo, es decir, que no contenga válvulas en su estructura.

2) Los ceros y los polos de la función impedancia, que son las raíces del numerador y denominador respectivamente, deben tener su parte real negativa o nula; por lo tanto estar ubicados sobre el eje real negativo o ser pares conjugados. Es una propiedad de estabilidad.

3) Si p se reemplaza por su conjugada, $Z(p)$ se transforma en su conjugada. Esto significa que la componente real de la función impedancia debe tener simetría par sobre el eje de frecuencia y la componente imaginaria simetría impar.

4) Los polos y los ceros de la función impedancia, que están sobre el eje imaginario ($j\omega$) son necesariamente simples y con residuos positivos en dichos polos.

Definiendo como circuito de *mínima reactancia* a aquel que no tiene polos sobre el eje imaginario, los elementos que quedan deben tener disipación o sea resistencias asociadas.

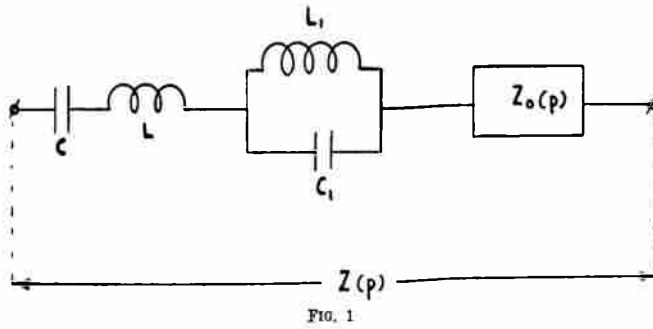


FIG. 1

Si en una impedancia cualquiera $Z(p)$, se quitan todas las reactancias puras en serie que contiene, la impedancia resultante $Z_0(p)$ es de mínima reactancia.

$$Z(p) = pL + \frac{1}{pc} + \frac{p_1 \alpha_v}{p^2 + \omega_v^2} + Z_0(p) \quad [2]$$

con

$$\alpha_v = \frac{1}{c_1}$$

$$\omega_v^2 = \frac{1}{L_1 c_1}$$

En la fig. 1 se indica una impedancia general $Z(p)$, que no es de mínima reactancia. Si de ella se quitan los elementos correspondientes a los polos: en el infinito dado por pL ; en cero dado por $\frac{1}{pc}$ y en ω , dada por $\frac{p\alpha}{p^2 + \omega^2}$, la parte restante $Z_0(p)$, que es una impedancia que no tiene polos en el eje imaginario, es entonces una impedancia de *mínima reactancia*.

En forma similar, si a una admitancia general se le quitan todos los polos sobre el eje imaginario, se tendrá un circuito de mínima susceptancia. Recordemos que los polos de una admitancia son los ceros de la impedancia correspondiente.

3. Propiedades principales de los tetrapolos. — La función principal en un tetrapolo es la función de transferencia que se define como la relación entre la transformada de la respuesta y la de la excitación.

Sea el circuito de la fig. 2 con el tetrapolo N .

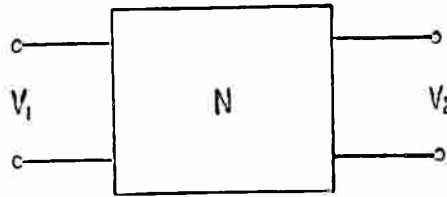


FIG. 2

y $v_1(t)$, $v_2(t)$ la tensión aplicada y la respuesta respectivamente. Según la definición la función de transferencia estará dada por:

$$F(p) = \frac{\int_0^{\infty} v_2(t) e^{-pt} dt}{\int_0^{\infty} v_1(t) e^{-pt} dt} \quad [3]$$

Esta función resulta generalmente expresada como la relación de dos polinomios en p .

Cuando la función de transferencia se toma para $p = j\omega$ o sea el comportamiento para las frecuencias reales, ésta se transforma en la función de transmisión y se expresa como

$$h(j\omega) = H(j\omega) e^{j\theta(\omega)} \quad [4]$$

$H(\omega)$ es el módulo y $\theta(\omega)$ es la fase de este tetrapolo, siendo ambas funciones de la frecuencia.

Algunas de las principales propiedades de estas funciones, cuando ellas corresponden a circuitos realizables son:

1) Los polos de las funciones de transferencia estable pueden solamente estar en el semiplano izquierdo o sobre el eje imaginario, siendo en este caso simples. Nunca sobre el semiplano derecho de la variable p .

2) No hay restricción en cuanto a la posición de los ceros de una función de transferencia, pero deben ocurrir en pares conjugados y no pueden ser más numerosos que los polos.

3) La parte real y la parte imaginaria de una función de transferencia para $p = j\omega$, son funciones par e impar de frecuencia respectivamente.

La función de transferencia correspondiente a los circuitos de *mínima fase*, que son aquellos que tienen la propiedad de producir la mínima rotación de fase para una dada variación de amplitud o módulo, es de gran importancia técnica. Esta característica se consigue cuando la función de transferencia tiene sus ceros ubicados todos en el semiplano izquierdo.

4. Planteo del problema. — Por ahora se tratará la relación entre parte real e imaginaria de una impedancia, que puede extenderse sin dificultad a la parte real e imaginaria de una función de transferencia como también al logaritmo de dicha función.

Si en una impedancia $Z(\omega)$, fig. 3 se hace circular un impulso

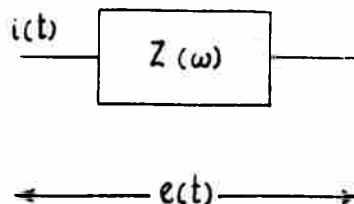


FIG. 3

unitario de corriente, la tensión que aparece en sus extremos puede expresarse por medio de la transformada de Fourier

$$e(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad [5]$$

donde:

$$Z(\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

El valor de $Z(\omega)$ se puede expresar por la siguiente relación:

$$Z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e(t) e^{-j\omega t} dt \quad [6]$$

La [5] y la [6] constituyen un par de transformadas de Fourier. En [5] se puede reemplazar $Z(\omega)$ por su valor $R(\omega) + jX(\omega)$, con lo que se tiene:

$$\begin{aligned} e(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) + jX(\omega)] [\cos \omega t + j \sin \omega t] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (R(\omega) \cos \omega t - X(\omega) \sin \omega t) d\omega + \\ &\quad + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (R(\omega) \sin \omega t + X(\omega) \cos \omega t) d\omega \end{aligned}$$

puesto que $R(\omega)$ es una función par de ω y $X(\omega)$ es una función impar, la segunda integral resulta nula, con lo que se tiene:

$$e(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) \cos \omega t d\omega - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} X(\omega) \sin \omega t d\omega \quad [7]$$

Las características físicas del problema imponen la condición de que $e(t)=0$ para $t < 0$ por lo tanto

$$\int_0^{\infty} R(\omega) \cos \omega t d\omega = \int_0^{\infty} X(\omega) \sin \omega (-t) d\omega$$

La primera integral es una función par de tiempo, mientras que la segunda es una función impar.

La suma de estas integrales para $t < 0$ debe ser nula y para $t > 0$ ambas son iguales, siendo su suma igual al doble de cualquiera de ellas. Por lo tanto para $t > 0$ se puede escribir:

$$e(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) \cos \omega t d\omega = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} X(\omega) \sin \omega t d\omega \quad [8]$$

Lo que indica que para determinar la tensión sobre la impedancia es necesario solamente el conocimiento de una de las componentes ya sea $R(\omega)$ o $X(\omega)$. Conocida una, la otra no es arbitraria, sino que está relacionada con ella.

En efecto si en la [6] se separa parte real e imaginaria se tiene:

$$R(\omega) = \int_0^{\infty} e(t) \cos \omega t dt$$

$$X(\omega) = - \int_0^{\infty} e(t) \operatorname{sen} \omega t dt$$

reemplazando en estas el valor de $e(t)$ según la expresión más conveniente de la [8] se tiene:

$$R(\omega) = - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega t dt \int_0^{\infty} X(\omega) \operatorname{sen} \omega t d\omega$$

$$X(\omega) = - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{sen} \omega t dt \int_0^{\infty} R(\omega) \cos \omega t d\omega$$
[9]

Las relaciones [9] permiten obtener una de las componentes de la impedancia conocida la otra. Estas fórmulas de difícil aplicación práctica, pues conducen a integrales muy complicadas para resolver en el campo real, pueden quizá ser pasadas al campo complejo para obtener una resolución más sencilla. Ello se verá que es posible puesto que la impedancia es en general función de la frecuencia compleja $p = \sigma + j\omega$, lo que permite trasladar el problema a dicho campo.

Sea $Z(p)$ una función que es analítica en el semiplano de la derecha, pero que puede tener polos en el semiplano izquierdo.

Escribiendo

$$Z(\sigma + j\omega) = R(\sigma, \omega) + jX(\sigma, \omega)$$

las funciones R y X son funciones armónicas de las variables σ , ω y regulares en todos los puntos del semiplano derecho. La función $R(\sigma, \omega)$ es igualmente regular sobre el eje imaginario, pues para $\sigma = 0$

$$R(0, \omega) = R(\omega)$$

es la componente resistiva de la impedancia y

$$X(0, \omega) = X(\omega)$$

es la componente reactiva, de la impedancia $Z(p)$ cuando la variable compleja se transforma en los puntos del eje imaginario solamente.

5. **Determinar la función impedancia $Z(p)$ conocida la parte real de $Z(j\omega)$.** — En este punto el problema podría enunciarse en la siguiente forma: Dada una función $R(\omega)$ par, positiva y regular para todos los valores de ω y en el infinito, determinar una función $X(\omega)$ regular, tal que:

$$R(\omega) + jX(\omega) = Z(j\omega)$$

sea la impedancia compleja de un circuito eléctrico.

Por razones de sencillez se determinará directamente de $R(\omega)$, no a la función $X(\omega)$, sino a $Z(p)$, que es la función de impedancia, de la cual se puede pasar rápidamente a $Z(j\omega)$ por medio de:

$$Z(p) \longrightarrow Z(j\omega)$$

$$p = j\omega$$

Conocida $Z(j\omega)$ se puede calcular fácilmente $X(\omega)$ por procedimientos algebraicos simples.

Se comenzará con una función de impedancia $Z(p)$ de un circuito pasivo que se sabe es una función racional, relación de dos polinomios. $Z(p)$ no debe tener polos en el semiplano derecho ni sobre el eje imaginario.

Si tiene polos en dicho eje incluyendo $p = 0$ y $p = j\infty$ deben eliminarse según se indica en la expresión

$$Z_0(p) = Z(p) - \left(a_1 p + \frac{b_1}{p} + \sum_s \frac{c_s p}{p^2 + \omega_s^2} \right) \quad [10]$$

$Z_0(p)$ es entonces regular en el semiplano derecho y sobre el eje imaginario siendo además una función de mínima reactancia.

Dado el carácter analítico de [10] se cumplen las condiciones de Cauchy-Rieman.

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma} = \frac{\partial X}{\partial \omega} ; \quad \frac{\partial R}{\partial \omega} = - \frac{\partial X}{\partial \sigma} \quad [11]$$

Las funciones $R(\sigma, \omega)$ y $X(\sigma, \omega)$ satisfacen ambas, a la ecuación diferencial de Laplace:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial \omega^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial \omega^2} = 0$$

Es decir que $R(\sigma, \omega)$ y $X(\sigma, \omega)$ son funciones armónicas y como a su vez constituyen la parte real o imaginaria de la misma función analítica, se llaman conjugadas.

Es fácil construir una función analítica cuando se conoce una de las conjugadas, ya sea $R(\sigma, \omega)$ o $X(\sigma, \omega)$. Pero como se conoce $R(\omega)$, es decir solamente un caso particular de la función conjugada, no se puede aplicar el mismo método que cuando se tienen los valores en cualquier punto del plano p .

En particular, el problema puede ser resuelto por aplicación de la fórmula de Schwarz, que se desarrolla en el apéndice y que permite determinar la función analítica $\psi(\lambda)$ dentro de un contorno, si se conoce el valor que la parte real de dicha función toma sobre el mismo

$$\Psi^*(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{j\phi'} + \lambda}{e^{j\phi'} - \lambda} \beta(\phi') d\phi' \quad [12]$$

En esta expresión que es válida para el interior del círculo unidad, la función $\beta(\phi')$ es el valor que la parte real de $\psi(\lambda)$ toma sobre la circunferencia

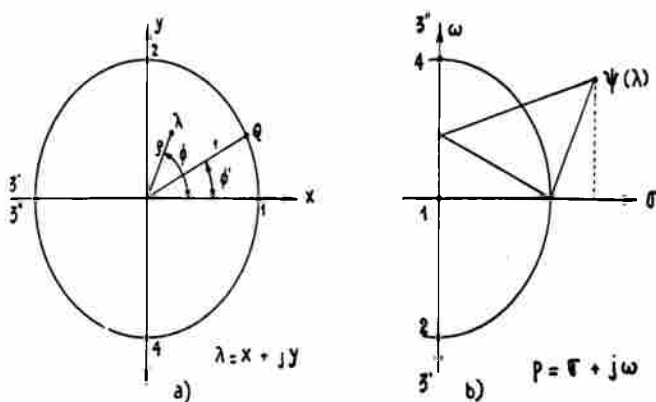


FIG. 4

ϕ' es el argumento de un punto Q sobre el círculo unitario y λ un punto cualquiera dentro del contorno, tal que:

$$Q = e^{j\phi'}$$

$$\lambda = \rho e^{j\phi}$$

Si se aplica esta fórmula al caso de la resistencia $R(\omega)$ para determinar la impedancia $Z(p)$, habrá que efectuar una transfor-

mación, que haga corresponder, al interior del círculo el semiplano derecho y al contorno, el eje imaginario en el plano p . Conocida la transformación, los contornos son tales que los puntos 1, 2, 3', 3'', 4 se corresponden en ambos planos, según se ve en la fig. 4 a) y b).

Partiendo del punto 1 sobre la circunferencia y recorriéndola en sentido contrario a las agujas del reloj, el área que queda a la izquierda debe corresponder al semiplano derecho p .

La función que efectúa esta transformación es:

$$p = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} = \frac{1 - \rho e^{j\phi}}{1 + \rho e^{j\phi}} \quad [13]$$

de donde sale que:

$$\sigma + j\omega = \frac{1 - \rho \cos \phi - j\rho \sin \phi}{1 + \rho \cos \phi + j\rho \sin \phi}$$

operando y separando parte real e imaginaria se llega a

$$\sigma + j\omega = \frac{1 - \rho^2 - j 2 \rho \sin \phi}{1 + 2 \rho \cos \phi + \rho^2} \quad [14]$$

en esta expresión se ve que, si $\rho < 1$ (interior del círculo) $\sigma > 0$ (semiplano derecho), y que si $\rho = 1$ la parte real se anula $\sigma = 0$ quedando:

$$j\omega = -j \frac{\sin \phi}{1 + \cos \phi} \quad [15]$$

se deduce de acá, que el eje imaginario positivo le corresponde valores negativos de $\sin \phi$ o sea el semi arco inferior.

La correspondencia queda entonces:

$$\phi = 0 \quad \omega = 0 \quad \text{punto 1}$$

$$\phi = \pm \frac{\pi}{2} \quad \omega = \mp 1 \quad \text{puntos 2 y 4}$$

$$\phi = \pm \pi \quad \omega = \mp \infty \quad \text{puntos 3 y 3''}$$

se aplicarán estas transformaciones para escribir la ecuación [12] en función de la nueva variable p .

Recordando primeramente que en lugar de ϕ' hay que usar la

variable sobre el nuevo contorno o sea ω ; se toma para ello el valor de λ de la ecuación [13]

$$\lambda = \frac{1 - \rho}{1 + \rho}$$

además siendo

$$e^{j\phi'} = \frac{1 - j\omega}{1 + j\omega} \quad [16]$$

el valor de los puntos correspondientes al contorno en el plano λ , que se transforma en el eje $j\omega$ en el plano p .

Diferenciando la [16] se tiene

$$j e^{j\phi'} d\phi' = \frac{-j 2}{(1 + j\omega)^2} d\omega$$

Remplazando acá $e^{j\phi}$ por su valor de [16] y operando se tiene que:

$$d\phi' = -\frac{2}{1 + \omega^2} d\omega \quad [17]$$

Reemplazando el valor de λ , ecuación [16], ecuación [17] y poniendo $R(\omega)$ en lugar de $\beta(\phi')$ se tiene en ecuación [12]:

$$Z(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1 - j\omega}{1 + j\omega} + \frac{1 - p}{1 + p}}{\frac{1 - j\omega}{1 + j\omega} - \frac{1 - p}{1 + p}} \cdot R(\omega) \frac{+ 2}{1 + \omega^2} d\omega \quad [18]$$

Los límites de la integral se transforman de 0 a 2π en $-\infty$ a ∞ en la siguiente forma:

$$\int_0^\pi + \int_{-\pi}^0 = \int_0^{-\infty} + \int_{\infty}^0 = \int_{\infty}^{-\infty} = - \int_{-\infty}^{\infty}$$

con lo que el signo negativo que afecta a $d\phi'$ desaparece. Reduciendo a común denominador el primer factor del integrando y operando se llega a

$$Z(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - j\omega p}{p - j\omega} R(\omega) \frac{2}{1 + \omega^2} d\omega$$

Racionalizando el primer factor del integrando, la expresión anterior se puede escribir:

$$Z(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p}{p^2 + \omega^2} R(\omega) d\omega + \frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(1 - p^2)}{(p^2 + \omega^2)(1 + \omega^2)} R(\omega) d\omega \quad [19]$$

Recordando que $R(\omega)$ es una función par de ω , la segunda integral es nula pues su integrando es una función impar de ω .

La primera integral se puede poner por simetría.

$$\boxed{Z(p) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{p R(\omega)}{p^2 + \omega^2} d\omega} \quad [20]$$

Esta es la expresión buscada que permite calcular el valor de la impedancia $Z(p)$ cuando se conoce la parte real de $Z(\omega)$. La condición de validez de esta expresión requiere que

$$\frac{R(\omega)}{p^2 + \omega^2} \xrightarrow[\omega \rightarrow \infty]{\omega \rightarrow 0} 0.$$

A título ilustrativo se desarrollan seguidamente dos ejemplos de la aplicación de la fórmula [20]:

Ejemplo 1º — Sea la función:

$$R(\omega) = \frac{R}{1 + \omega^2 c^2 R^2} = \frac{\frac{R}{\beta^2}}{\frac{1}{\beta^2} + \omega^2} \quad [21]$$

poniendo $\omega = \lambda$ y reemplazando en [20]

$$\begin{aligned} Z(p) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{p}{p^2 + \lambda^2} \cdot \frac{\frac{R}{\beta^2}}{\frac{1}{\beta^2} + \lambda^2} d\lambda = \\ &= \frac{2PR}{\beta^2 \pi} \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(p^2 + \lambda^2) \left(\frac{1}{\beta^2} + \lambda^2 \right)} \quad [22] \end{aligned}$$

Desarrollando el integrando en fracciones parciales

$$\frac{1}{(p^2 + \lambda^2) \left(\frac{1}{\beta^2} + \lambda^2 \right)} = \frac{1}{\beta^2 - p^2} \left[\frac{1}{p^2 + \lambda^2} - \frac{1}{\frac{1}{\beta^2} + \lambda^2} \right]$$

Sustituyendo en [22]

$$Z(p) = \frac{2 p R}{\beta^2 \pi \left(\frac{1}{\beta^2} - p^2 \right)} \int_0^\infty \left[\frac{1}{p^2 + \lambda^2} - \frac{1}{\frac{1}{\beta^2} + \lambda^2} \right] d\lambda$$

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{p^2 + \lambda^2} = \frac{\pi}{2 p} ; \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\frac{1}{\beta^2} + \lambda^2} = \beta \frac{\pi}{2}$$

$$Z(p) = \frac{2 p R}{\beta^2 \pi \left(\frac{1}{\beta^2} - p^2 \right)} \left(\frac{\pi}{2 p} - \frac{\beta \pi}{2} \right) =$$

$$Z(p) = \frac{R}{1 - \beta^2 p^2} (1 - \beta p) = \frac{R}{1 + \beta^2 p}$$

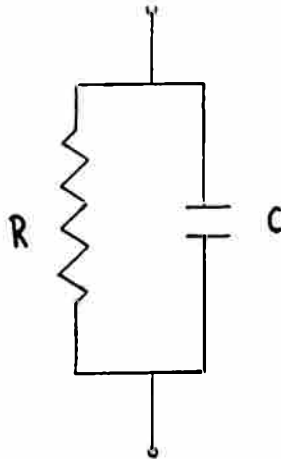


FIG. 5

y sustituyendo $\beta^2 = R^2 c^2$ resulta

$$Z(p) = \frac{R}{1 + p R c} \quad [23]$$

que es la impedancia correspondiente al circuito indicado en la figura 5.

Ejemplo 2º — Sea la parte real de una impedancia dada por:

$$R(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^4} \quad [24]$$

calcular la función $Z(p)$

Reemplazando en [20] se tiene

$$Z(p) = \frac{2p}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(1 + \lambda^4)(p^2 + \lambda^2)}$$

Desarrollando el integrando:

$$\frac{1}{(p^2 + \lambda^2)(1 + \lambda^4)} = \frac{1}{1 + p^4} \left\{ \frac{1}{p^2 + \lambda^2} + \frac{p^2 - \lambda^2}{1 + \lambda^4} \right\}$$

Reemplazando esto en el valor de $Z(p)$ se tiene:

$$Z(p) = \frac{2p}{\pi(1 + p^4)} \int_0^\infty \left[\frac{1}{p^2 + \lambda^2} + \frac{p^2 - \lambda^2}{1 + \lambda^4} \right] d\lambda \quad [25]$$

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{p^2 + \lambda^2} = \frac{\pi}{2p}; \quad \int_0^\infty \frac{d\lambda}{1 + \lambda^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}; \quad \int_0^\infty \frac{\lambda^2 d\lambda}{1 + \lambda^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} Z(p) &= \frac{2p}{\pi(1 + p^4)} \left[\frac{\pi}{2p} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(p^2 - 1) \right] = \\ &= \frac{1}{1 + p^4} \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(p^3 - p) \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{p^3 - p + \sqrt{2}}{1 + p^4} \quad [26] \end{aligned}$$

Dividiendo numerador y denominador por $p^2 - \sqrt{2}p + 1$ se tiene

$$Z(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{p + \sqrt{2}}{p^2 + \sqrt{2}p + 1} \quad [27]$$

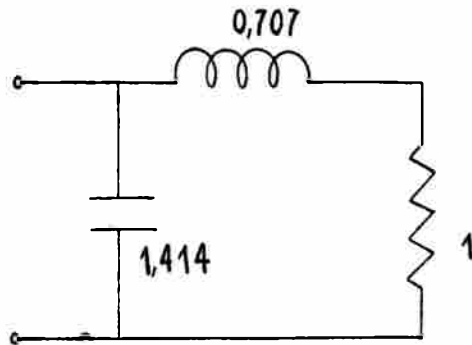


Fig. 8

6. Determinar la función $Z(p)$ conocida la parte imaginaria de $Z(j\omega)$ o sea la reactancia $X(\omega)$. — Partiendo de la expresión

$$Z(p) = R(\sigma, \omega) + jX(\sigma, \omega)$$

y multiplicando ambos miembros por $-j$ se tiene

$$-jZ(p) = -jR(\sigma, \omega) + X(\sigma, \omega)$$

el problema se reduce entonces al caso anterior, donde, conocida la parte real, aquí $X(\omega)$ se determina la función $-jZ(p)$. Se puede, por lo tanto, usar directamente la expresión [19] poniendo $X(\omega)$ en lugar de $R(\omega)$ y $-jZ(p)$ en lugar de $Z(p)$, con lo que queda:

$$\begin{aligned} -jZ(p) = & \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p}{p^2 + \omega^2} X(\omega) d\omega + \\ & + \frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega(1 - p^2)}{(p^2 + \omega^2)(1 + \omega^2)} X(\omega) d\omega \quad [28] \end{aligned}$$

Como la función reactancia $X(\omega)$ es impar con respecto a ω , la primera integral es nula, por la simetría de sus límites.

En la segunda integral se hace la siguiente transformación en el numerador: se suma y se resta ω^2 a $(1 - p^2)$

$$(1 + \omega^2) - (p^2 + \omega^2) = 1 - p^2$$

Sustituyendo en [28], cambiando de signo y quitando j se llega a:

$$Z(p) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega X(\omega)}{p^2 + \omega^2} d\omega + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega X(\omega)}{1 + \omega^2} d\omega \quad [29]$$

La primera integral tiene integrando par, por lo tanto sus límites son cero e ∞ y el valor de la integral resulta multiplicada por 2.

En cuanto a la segunda integral, se observa que ella es independiente de p , y también de ω ; a este valor se le llamará $R(0)$. Este valor de $R(0)$ es el de una resistencia que está en serie con $Z(p)$ y que es independiente de la frecuencia, no el valor que $Z(p)$ presenta a frecuencia cero. La independencia de $R(0)$ de

ω exige que este valor esté localizado según se indica en la figura siguiente:

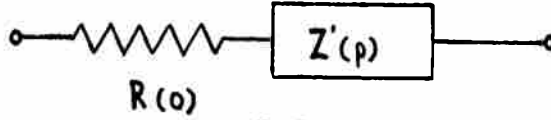


Fig. 7

donde

$$Z'(p) = Z(p) - R(0) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega X(\omega) d\omega}{p^2 + \omega^2}$$

En casi todos los casos se puede suponer $R(0)=0$ con lo que $Z(p)=Z'(p)$. En el ejemplo dado del circuito de la fig. 5

$$R(0) = 0$$

y el valor de $Z(p)$ resulta el de resolver la integral indicada más arriba.

Con estas consideraciones la [29] se transforma

$$Z(p) = R(0) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega X(\omega) d\omega}{p^2 + \omega^2} \quad [30]$$

con

$$R(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega X(\omega) d\omega}{1 + \omega^2}$$

Para que [30] sea válida el integrando debe cumplir la condición de

$$\frac{\omega X(\omega)}{p^2 + \omega^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$$

Aplicación al ejemplo N° 1. — Dada la parte imaginaria

$$X(\omega) = -j \frac{\omega R^2 c}{1 + \omega^2 R^2 c^2}$$

calcular el valor de $Z(p)$. Para este caso se ha indicado $R(0)=0$ por lo tanto

$$Z(p) = + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 R^2 c d\omega}{(1 + \omega^2 R^2 c^2) (p^2 + \omega^2)}$$

poniendo $\delta = \frac{1}{Rc}$ resulta

$$\begin{aligned} Z(p) &= \frac{2}{\pi c} \int_0^\infty \frac{\omega^2 d\omega}{(\delta^2 + \omega^2)(p^2 + \omega^2)} = \\ &= \frac{2}{\pi c (p^2 - \delta^2)} \int_0^\infty \left(\frac{\omega^2}{\delta^2 + \omega^2} - \frac{\omega^2}{p^2 + \omega^2} \right) d\omega = \\ &= \frac{2}{\pi c (p^2 - \delta^2)} \left[\left| \omega - \delta \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{\delta} \right|_0^\infty - \left| \omega - p \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{p} \right|_0^\infty \right] = \\ &= \frac{2}{\pi c (p^2 - \delta^2)} \left[(p - \delta) \frac{\pi}{2} \right] = \frac{1}{c(p + \delta)} = \frac{R}{pRc + 1} = Z(p) \end{aligned}$$

7. Relaciones entre el módulo y la fase de una función de transferencia. — Según la definición de función de transferencia dada en § 3, para el tetrapolo de la fig. 2, podemos escribir que:

$$h(p) = \frac{V_2}{V_1} = e^{\theta(p)} \quad [31]$$

donde $h(p)$ es la función de transferencia que caracteriza al sistema, V_2 y V_1 son las transformadas de la salida y la entrada respectivamente, $\theta(p)$ representa la función de propagación, que resulta ser el $\ln h(p)$. Esta función de propagación puede descomponerse en parte real e imaginaria:

$$\theta(p) = A(p) + jB(p) \quad [32]$$

Siendo la primera la función atenuación y la segunda la de fase.

En la técnica es corriente usar las funciones $A(p)$ y $B(p)$ para $p = j\omega$ en lugar de la de transferencia.

Se puede escribir entonces de acuerdo con la [4] y [31] que:

$$\begin{aligned} A(j\omega) &= \ln \left| \frac{V_2}{V_1} \right|_{p=j\omega} = \ln H(j\omega) \\ B(j\omega) &= \arg. \left| \frac{V_2}{V_1} \right|_{p=j\omega} = \theta(\omega) \end{aligned} \quad [33]$$

Si $\theta(p)$ es una función analítica en el semiplano derecho, entonces $A(p)$ y $B(p)$ son con respecto a ella lo que $R(p)$ y $X(p)$ son con respecto a $Z(p)$. Se pueden aplicar entonces todos los razonamientos dados anteriormente con solo sustituir $R(p)$ por $A(p)$; $X(p)$ por $B(p)$ y $Z(p)$ por $\theta(p)$.

Esto indica que conocida la parte real para el eje imaginario $A(j\omega)$ se puede calcular $\theta(p)$ o conocida la fase $B(\omega)$, en función de la frecuencia se puede determinar $\theta(p)$.

Una vez conocida $\theta(p)$ el paso a $h(p)$ es inmediato, pues por [31] se obtendrán la relación necesaria.

La condición para que $\theta(p)$ sea una función analítica, es que los ceros de la función de transferencia estén todos en el semiplano de la izquierda y este circuito constituye lo que se llamó circuito de *mínima fase*.

Si la función $h(p)$ tiene ceros en el semiplano derecho, al tomar log. para obtener $\theta(p)$, estos ceros se transforman en polos de esta última y por lo tanto deja de ser analítica en dicho semiplano.

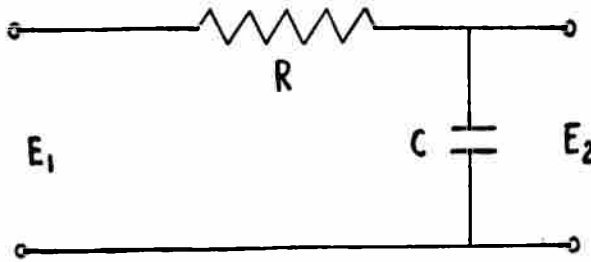


FIG. 8

Las relaciones dadas en [20] y [30] se aplican solamente a funciones $\theta(p)$ que cumplen con la condición de ser holomorfas en el semiplano derecho. Ellas corresponden a la clase especial de circuitos de *mínima fase*.

Se comprobará este razonamiento aplicado a un ejemplo concreto. Sea el circuito indicado en la figura 8. Conociendo el valor de $A(\omega)$ calcular $\theta(p)$

$$\begin{aligned} \frac{E_2}{E_1} &= \frac{\frac{1}{Rc}}{p + \frac{1}{Rc}} = \frac{\sigma}{p + \sigma} = h(p) = e^{\theta(p)} \\ \frac{E_2}{E_1} &= \frac{\sigma(\sigma - j\omega)}{\sigma^2 + \omega^2} \quad \sigma = \frac{1}{Rc} \\ \left| \frac{E_2}{E_1} \right| &= e^A = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}} \quad \operatorname{tg} B = \frac{\omega}{\sigma} \\ A(\omega) &= \ln \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}} \quad B = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{\sigma} \end{aligned}$$

Conociendo $A(\omega)$ calcular $\theta(p)$ y luego reemplazando $p = j\omega$ sacar de $\theta(j\omega) = A(\omega) + B(\omega)$ el valor de $B(\omega)$

$$\theta(p) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{p}{p^2 + \omega^2} \ln \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}} d\omega$$

$$\ln \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}} = \ln \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}} = -\frac{1}{2} \ln(1 + v^2)$$

$$\theta(p) = -\frac{2p\sigma}{\pi 2} \int_0^{\infty} \frac{\ln(1 + v^2)}{p^2 + \sigma^2 v^2} dv$$

Se trata de resolver la integral.

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{p^2 + \sigma^2 x^2} dx$$

tomando la función

$$\frac{\ln(Z + j)}{p^2 + \sigma^2 Z^2}$$

se la integra siguiendo el contorno indicado en la figura 9.

Dentro de ese contorno dicha función tiene un polo en $Z = j \frac{p}{\sigma}$ por lo tanto, aplicando el teorema de Cauchy:

$$\int_{-R}^R \frac{\ln(x + j)}{p^2 + \sigma^2 x^2} dx + \int_0^{\pi} \frac{\ln(R e^{j\theta} + j)}{p^2 + \sigma^2 R^2 e^{j2\theta}} j R e^{j\theta} d\theta =$$

$$2\pi j \operatorname{Res.} \left(Z = j \frac{p}{\sigma} \right) = 2\pi j \lim_{z \rightarrow j \frac{p}{\sigma}} \frac{\ln(Z + j)}{\sigma^2 \left(Z + j \frac{p}{Z} \right)} = \pi \frac{\ln j \left(\frac{p}{\sigma} + 1 \right)}{\sigma p}$$

La integral a lo largo del semicírculo de radio R tiende a cero cuando $R \rightarrow \infty$ por lo tanto queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(x + j)}{p^2 + \sigma^2 x^2} dx = \frac{\pi}{\sigma p} \ln j \frac{p + \sigma}{\sigma}$$

$$\ln(x + j) = \ln \sqrt{x^2 + 1} + j \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{x} ;$$

$$\ln j \frac{p + \sigma}{\sigma} = \ln \frac{p + \sigma}{\sigma} + j \frac{\pi}{2}$$

reemplazando e igualando parte real e imaginaria

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{p^2 + \sigma^2 x^2} dx + j \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{x} dx = \\ = \frac{\pi}{\sigma p} \ln \frac{\sigma + p}{\sigma} + j \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{\sigma p} \end{aligned}$$

Tomando parte real solamente, como el integrando de la misma es una función par se tiene:

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{p^2 + \sigma^2 x^2} dx = \ln \frac{\sigma + p}{\sigma}$$

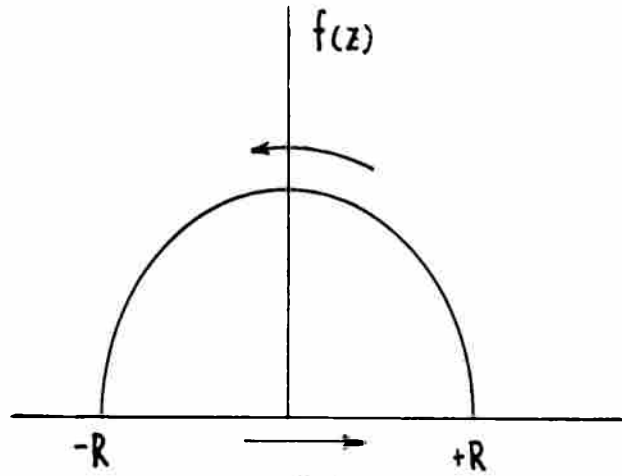


Fig. 9

Reemplazando en el valor de $\theta(p)$ se tendrá

$$\theta(p) = -\frac{\sigma p}{\pi} \cdot \frac{\pi}{\sigma p} \ln \frac{\sigma + p}{\sigma} = -\ln \frac{\sigma + p}{\sigma}$$

$$\theta(p) = \ln \frac{\sigma}{p + \sigma}$$

Conocida $\theta(p)$ se puede determinar la función de transferencia $h(p)$ del circuito que tenía por $A(\omega)$ el valor dado puesto que:

$$h(p) = e^{\theta(p)}$$

$$h(p) = e^{\ln \frac{\sigma}{p + \sigma}} = \frac{\sigma}{p + \sigma}$$

APENDICE

Fórmula de Schwarz. — Sea un círculo con centro en $Z = 0$ y radio unitario en el plano z . Se quiere construir una función holomorfa en el interior del círculo, conociendo el valor de la parte real de dicha función sobre el contorno del círculo.

La función puede ser desarrollada en serie de potencias positivas de z tal que:

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \quad [1]$$

Para los puntos sobre el contorno se tiene:

$$z = e^{j\phi}$$

con

$$0 \leq \phi \leq 2\pi$$

La función $f(z)$ sobre el contorno vale

$$f(e^{j\phi}) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\phi} \quad [2]$$

haciendo $c_0 = a_0 + j b_0$, $c_n = a_n + j b_n$ y llamando con Φ la parte real de $f(p)$ sobre el contorno se tiene:

$$\Phi(\phi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\phi - b_n \sin n\phi) \quad [3]$$

Si se desarrolla Φ en serie de Fourier, se tienen los coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\phi) d\phi \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\phi) \cos n\phi d\phi$$

$$b_n = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\phi) \sin n\phi d\phi$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} c_0 &= j b_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\phi) d\phi \\ c_n &= a_n + j b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\phi) (\cos n\phi - j \sin n\phi) d\phi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\phi) e^{-jn\phi} d\phi \end{aligned}$$

Reemplazando esto en la fórmula [1]

$$f(z) = j b_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\phi) d\phi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\phi) e^{-jn\phi} z^n d\phi$$

$$f(z) = j b_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\phi) d\phi + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\phi) \sum_{n=1}^{\infty} z^n e^{-jn\phi} d\phi$$

Siendo $z < 1$ se tiene una serie geométrica cuya suma es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z e^{-j\phi})^n = \frac{1}{1 - \frac{z}{e^{j\phi}}} - 1$$

pues le falta el primer término, al comenzar la sumatoria de 1 y no de 0.

Simplificando se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z e^{-j\phi})^n = \frac{z}{e^{j\phi} - z}$$

reemplazando en las integrales:

$$\begin{aligned} f(z) &= j b_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\phi) d\phi + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\phi) \frac{z d\phi}{e^{j\phi} - z} = \\ &= j b_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\phi) \frac{e^{j\phi} - z + 2z}{e^{j\phi} - z} d\phi = \end{aligned}$$

$$\boxed{f(z) = j b_0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\phi) \frac{e^{j\phi} + z}{e^{j\phi} - z} d\phi}$$

Esta fórmula permite calcular la función $f(z)$, holomorfa dentro de un contorno C ; conociendo el valor $\Phi(\phi)$, que la parte real de dicha función toma sobre el contorno.

La constante b_0 que es puramente imaginaria, indica que hay una infinidad de funciones $f(z)$ que cumplen con la condición impuesta.

Haciendo $b_0 = 0$ se tiene la función $f(z)$ con la mínima parte imaginaria.

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

NUEVO METODO DE ITERACION PARA LA RESOLUCION DE ECUACIONES

VALIDO INCLUSIVE PARA LOS CASOS EN QUE DIVERGEN LAS
SUCESIONES USUALES DE ITERACION

ELIZABETH GROZA DE DOLIŃSKI

El método de resolución de ecuaciones por iteración exige, ante todo, la posibilidad de expresar cada incógnita de manera unívoca mediante una función de todas las incógnitas del sistema dado, función que, en el entorno del conjunto de valores que resuelve el sistema, experimenta cambios suficientemente pequeños.

En el caso de una sola ecuación con una incógnita:

$$f(x) = 0 \quad [1]$$

se la puede presentar en la forma

$$x = \varphi(x) \quad [2]$$

función que, en el entorno de la raíz buscada debe verificar la condición:

$$|\varphi'(x)| < k < 1 \quad [3]$$

En el caso de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y) &= 0 \\ f_2(x, y) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [4]$$

se aplica la transformación siguiente:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(x, y) \\ y &= \psi(x, y) \end{aligned} \right\} \quad [5]$$

para la cual se cumplen simultáneamente las dos condiciones:

$$\left. \begin{aligned} |\varphi_x'| + |\psi_x'| &< \kappa < 1 \\ |\varphi_y'| + |\psi_y'| &< \kappa < 1 \end{aligned} \right\} \quad [6]$$

De manera análoga, la condición suficiente para que la sucesión de iteración del sistema (ya transformado):

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \right\} \quad [7]$$

sea convergente es que se cumplan simultáneamente las desigualdades:

$$\left. \begin{aligned} |f'_{1x_1}| + |f'_{2x_1}| + |f'_{3x_1}| + \dots + |f'_{nx_1}| &< \kappa < 1 \\ |f'_{1x_2}| + |f'_{2x_2}| + |f'_{3x_2}| + \dots + |f'_{nx_2}| &< \kappa < 1 \\ &\vdots \\ |f'_{1x_n}| + |f'_{2x_n}| + |f'_{3x_n}| + \dots + |f'_{nx_n}| &< \kappa < 1 \end{aligned} \right\} \quad [8]$$

Cuanto mayor es el número de incógnitas tanto más estrictas son las limitaciones en cuanto a la variabilidad de las funciones del tipo [7]. En general, por lo tanto, no se puede aplicar el método de iteración si no se lleva el sistema de ecuaciones a una forma en la cual se cumplan las desigualdades [8].

Puestos a la búsqueda de un método que permita evitar las limitaciones mencionadas, estudiaremos sucesivamente los casos característicos que surgen del examen de una función (momentáneamente de una sola variable) dada por el segundo miembro de la ecuación [2]:

$$y = \varphi(x) \quad [9]$$

Primeramente, enumeraremos los casos en los cuales las sucesiones de iteración usual son convergentes, es decir, cuando

$$|\varphi'(x)| < \kappa < 1$$

Pueden presentarse aquí cuatro posibilidades según que partamos del valor x_1 aproximado de la raíz buscada x_0 por defecto o por exceso, y según que en el entorno que contiene todas las aproximaciones sucesivas la derivada $\varphi'(x)$ sea positiva o negativa.

Primer caso:

$$0 < \varphi'(x) < \kappa < 1 \quad \text{y} \quad x_1 < x_0 \quad (\text{fig. 1});$$

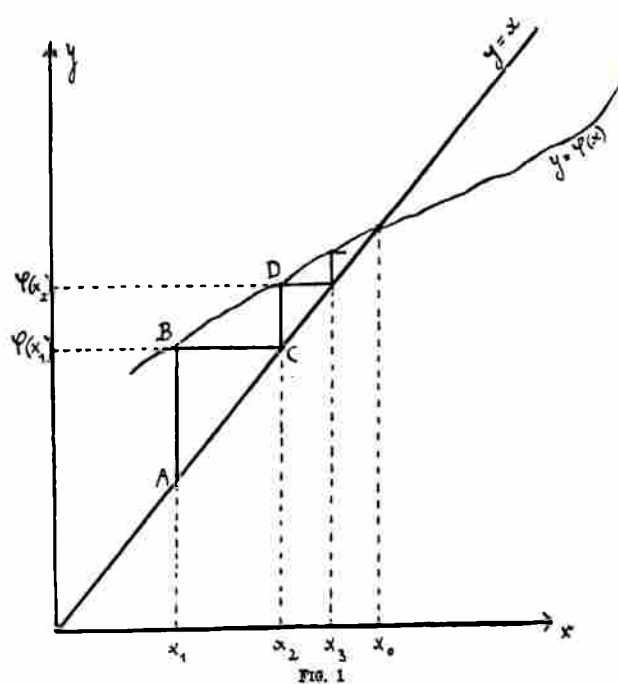


FIG. 1

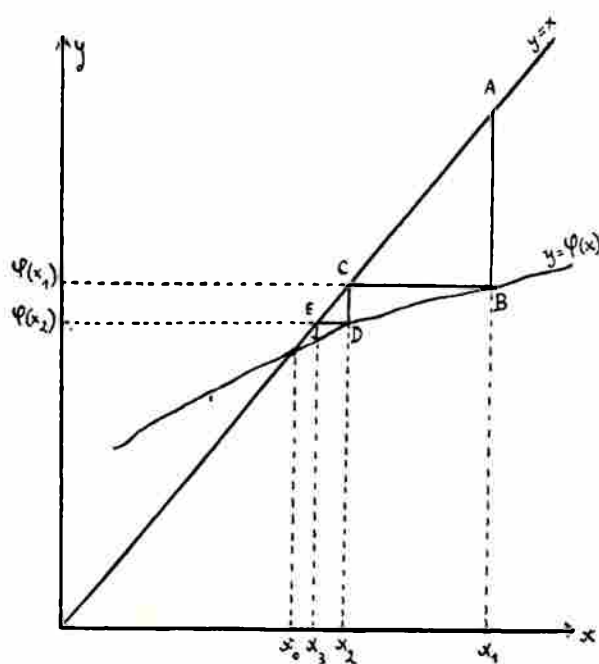


FIG. 2

entonces la sucesión de iteración crece:

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_0$$

y simultáneamente:

$$x_2 - x_1 > x_3 - x_2 > x_4 - x_3 > \dots > x_{m+1} - x_m > \dots$$

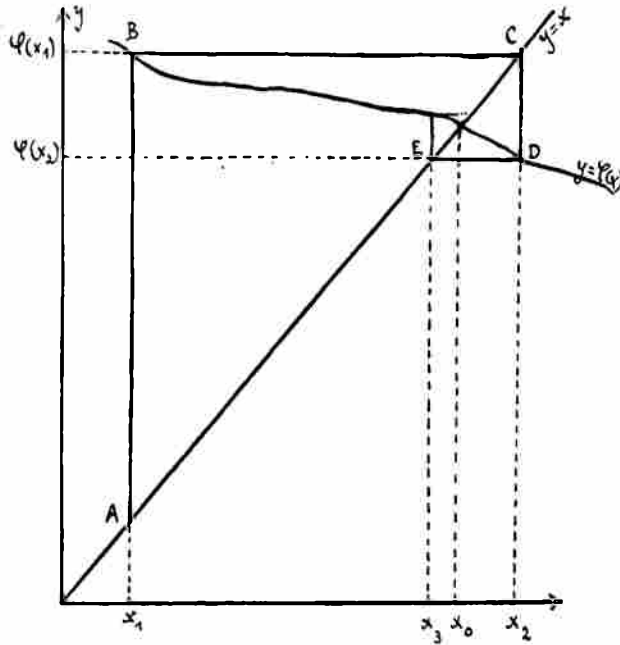


FIG. 3

Segundo caso:

$$0 < \varphi'(x) < \kappa < 1 \text{ y } x_1 > x_0 \text{ (fig. 2) ;}$$

entonces:

$$x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_0$$

y

$$x_1 - x_2 > x_2 - x_3 > x_3 - x_4 > \dots > x_m - x_{m+1} > \dots$$

Tercer caso:

$$-1 < \kappa < \varphi'(x) < 0 \text{ y } x_1 < x_0 \text{ (fig. 3) ;}$$

tenemos entonces que:

$$x_1 < x_0, x_2 > x_0, x_3 < x_0, \dots, x_{2m+1} < x_0, x_{2m+2} > x_0, \dots$$

y

$$x_2 - x_1 > x_2 - x_3 > x_4 - x_3 > x_4 - x_5 > \dots > x_{2m} - x_{2m-1} > \\ > x_{2m} - x_{2m+1} > x_{2m+2} - x_{2m+1} > x_{2m+2} - x_{2m+3} > \dots$$

Cuarto caso:

$$-1 < \kappa < \varphi'(x) < 0 \text{ y } x_1 > x_0 \text{ (fig. 4);}$$

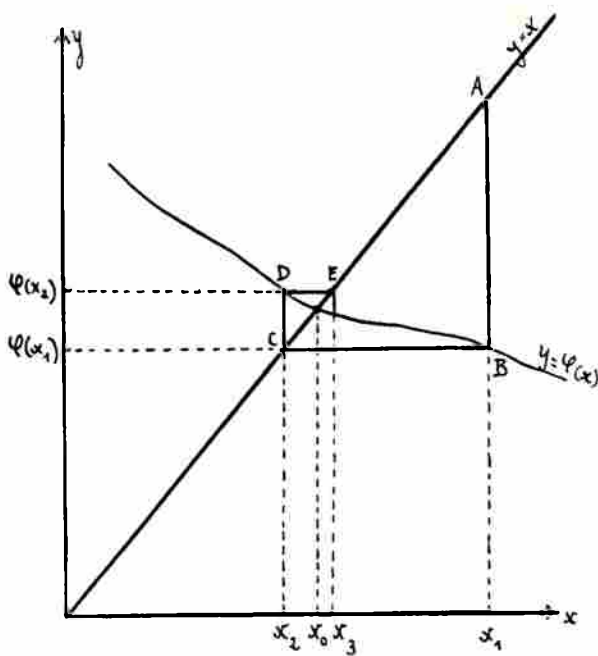


FIG. 4

de donde resulta, que:

$$x_1 > x_0, x_2 < x_0, x_3 > x_0, \dots, x_{2m+1} > x_0, x_{2m+2} < x_0, \dots$$

y

$$x_1 - x_2 > x_3 - x_2 > x_3 - x_4 > \dots > x_{2m-1} - x_{2m} > \\ > x_{2m+1} - x_{2m} > x_{2m+1} - x_{2m+2} > x_{2m+3} - x_{2m+2} > \dots$$

En los cuatro casos siguientes las sucesiones de iteración son divergentes:

Quinto caso:

$$\varphi'(x) > 1 \text{ y } x_1 < x_0 \text{ (fig. 5)}$$

de donde resulta:

$$x_0 > x_1 > x_2 > \dots > x_m > x_{m+1} > \dots$$

y

$$x_1 - x_2 < x_2 - x_3 < x_3 - x_4 < \dots < x_m - x_{m+1} < \dots$$

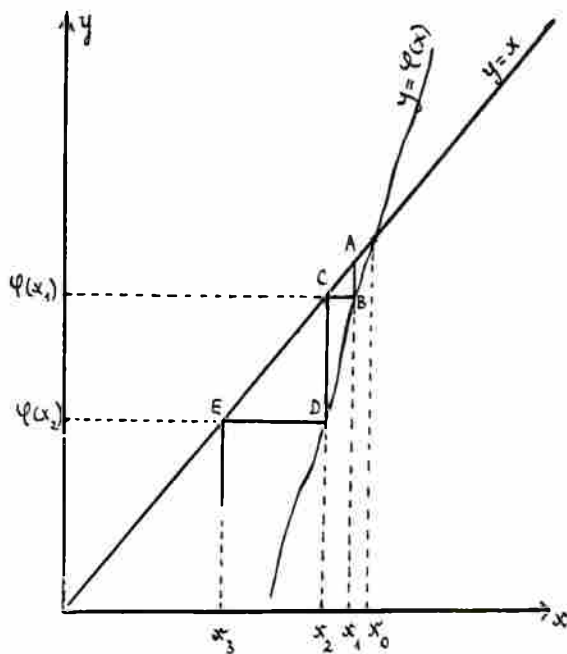


FIG. 5

Sexto caso

$$\varphi'(x) > 1 \text{ y } x_1 > x_0 \text{ (fig. 6)}$$

entonces:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m < x_{m+1} < \dots$$

y

$$x_2 - x_1 < x_3 - x_2 < x_4 - x_3 < \dots < x_{m+1} - x_m < \dots$$

Séptimo caso:

$$\varphi'(x) < -1 \text{ y } x_1 < x_0 \text{ (fig. 7)}$$

tenemos entonces:

$$x_1 < x_0, x_2 > x_0, x_3 < x_0, x_4 > x_0, \dots, x_{2m-1} < x_0, x_{2m} > x_0, \dots$$

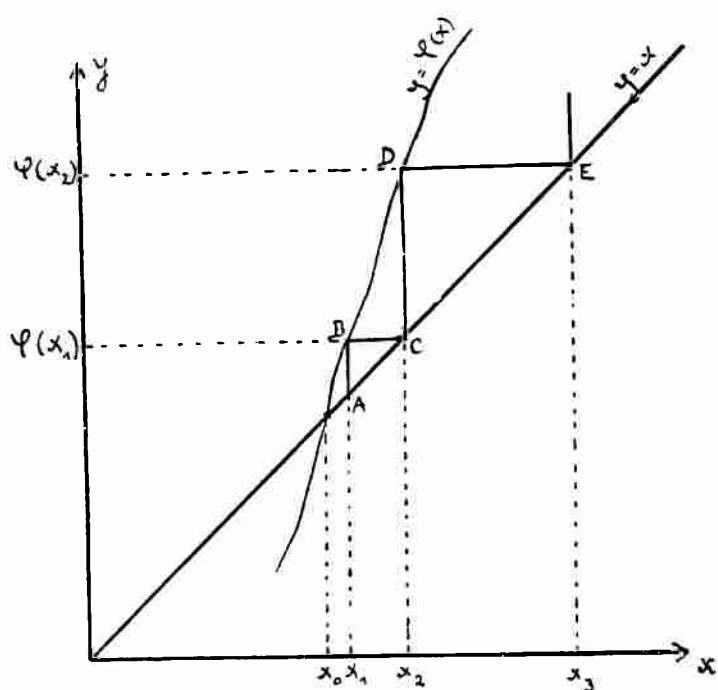


FIG. 6

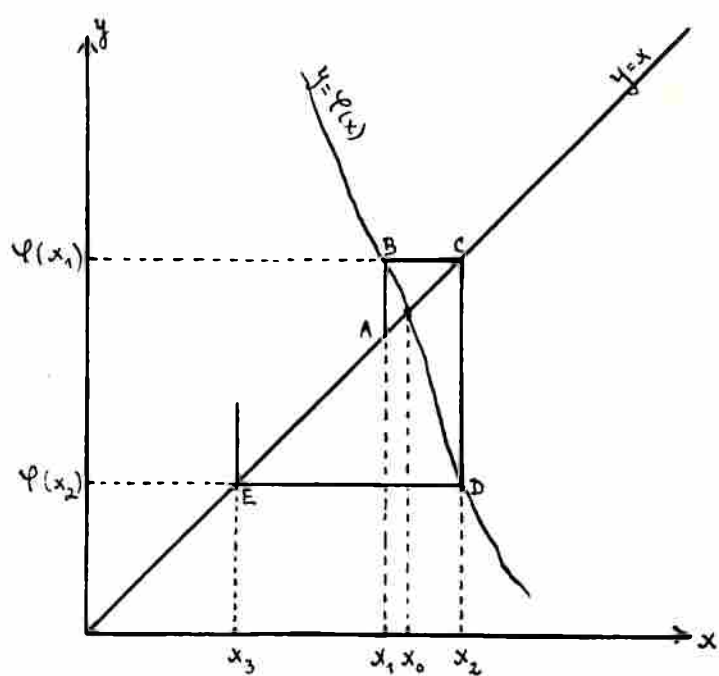


FIG. 7

y simultáneamente:

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 < x_2 - x_3 < x_4 - x_3 < x_4 - x_5 < \dots < x_{2m} - x_{2m-1} < \\ < x_{2m} - x_{2m+1} < x_{2m+2} - x_{2m+1} < x_{2m+2} - x_{2m+3} < \dots \end{aligned}$$

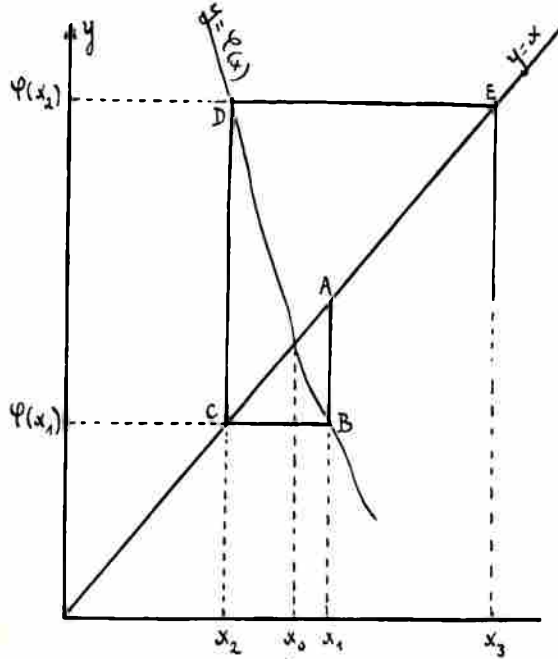


FIG. 8

Octavo caso:

$$\varphi'(x) < -1 \text{ y } x_1 > x_0 \text{ (fig. 8)}$$

En este caso:

$$x_0 < x_1, x_0 > x_2, x_0 < x_3, x_0 > x_4, \dots, x_0 < x_{2m-1}, x_0 > x_{2m}, \dots$$

y

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 < x_3 - x_2 < x_3 - x_4 < \dots < x_{2m-1} - x_{2m} < x_{2m+1} - \\ - x_{2m} < x_{2m+1} - x_{2m+2} < x_{2m+3} - x_{2m+2} < \dots \end{aligned}$$

En todos estos ocho casos se podría aplicar, con ciertas condiciones satisfechas, el siguiente método de evaluar las raíces con la exactitud deseada:

Supongamos que la raíz x_0 esté incluida en el intervalo $[c; d]$ (donde $c < d$) y que en este intervalo no haya ninguna otra raíz. Formemos el cociente incremental:

$$\alpha = \frac{\varphi(d) - \varphi(c)}{d - c}$$

que nos da un valor medio (que nos permite una orientación aproximada) de la derivada $\varphi'(x)$ en el intervalo $[c; d]$ (fig. 9).

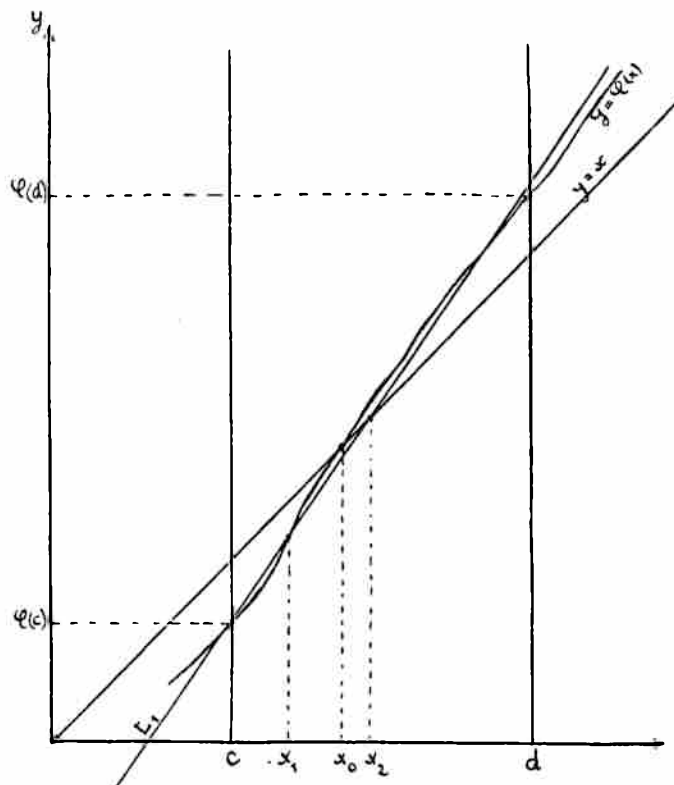


FIG. 9

El método consiste, a la manera de la «regula falsi», en substituir la curva $y = \varphi(x)$ por rectas en el intervalo $[c; d]$.

Como primera aproximación de la raíz tomemos cualquier valor x_1 de este intervalo, calculemos el valor $\varphi(x_1)$ y por el punto $[x_1, \varphi(x_1)]$ hagamos pasar la recta L_1 , de coeficiente angular α :

$$y - \varphi(x_1) = \alpha(x - x_1)$$

El valor x_2 de la abscisa (o lo que es lo mismo, de la ordenada) del punto de intersección de la recta L_1 con la recta $y = x$ constituye la segunda aproximación de la raíz x_0 .

Obtenemos la relación siguiente entre x_1 y x_2 :

$$x_2 = \frac{\varphi(x_1) - \alpha \cdot x_1}{1 - \alpha}$$

Conservando el mismo coeficiente angular α para las rectas de aproximación que reemplazan a la curva $y = \varphi(x)$ en dicho intervalo, hacemos pasar la recta L_2 por el punto $[x_2, \varphi(x_2)]$:

$$y - \varphi(x_2) = \alpha(x - x_2).$$

El valor x_3 de la abscisa del punto de intersección de la recta L_2 con la recta $y = x$ constituye la tercera aproximación a la raíz buscada:

$$x_3 = \frac{\varphi(x_2) - \alpha \cdot x_2}{1 - \alpha}$$

Prosiguiendo en esta forma obtenemos una sucesión cuyo enésimo término se expresa por la siguiente fórmula de recurrencia:

$$x_n = \frac{\varphi(x_{n-1}) - \alpha \cdot x_{n-1}}{1 - \alpha} \quad [10]$$

Discutamos la convergencia de la sucesión así obtenida. Ante todo, hay que determinar la condición suficiente para que todos los términos de la sucesión estén incluidos en el intervalo $[c; d]$, es decir, para que la recta L_n , de coeficiente angular α y que pasa por el punto $[x_n, \varphi(x_n)]$, corte a la recta $y = x$ en un punto cuya abscisa pertenezca a este intervalo. La condición buscada equivale, como es fácil de observar, a la condición de que el arco de la curva $y = \varphi(x)$ correspondiente al intervalo $[c; d]$ no exceda la franja determinada por las dos rectas:

$$y = c + \alpha(x - c)$$

$$y = d + \alpha(x - d)$$

Las figuras 10 y 11 ilustran esta condición en dos casos diferentes: a) para $\alpha > 1$; b) para $\alpha < 1$. Excluimos de las consideraciones el caso en que $\alpha = 1$, dado que se lo puede evitar reduciendo el intervalo $[c; d]$.

Supongamos, pues, que dicha condición se cumple, y además que en el intervalo abierto $(c; d)$ la función $\varphi(x)$ tiene la derivada $\varphi'(x)$. Determinemos la diferencia entre la raíz buscada y su enésima aproximación:

$$x_0 - x_n = x_0 - \frac{\varphi(x_{n-1}) - \alpha \cdot x_{n-1}}{1 - \alpha}$$

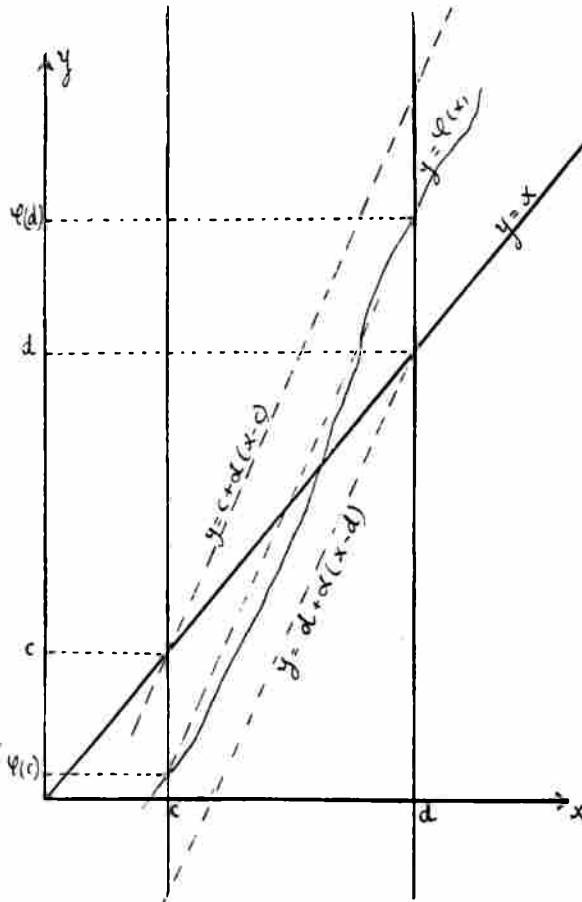


FIG. 10

Siendo $x_0 = \varphi(x_0)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} x_0 - x_n &= \varphi(x_0) - \frac{\varphi(x_{n-1}) - \alpha \cdot x_{n-1}}{1 - \alpha} = \\ &= \frac{\varphi(x_0) - \varphi(x_{n-1}) - \alpha(x_0 - x_{n-1})}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

Apliquemos el teorema de Lagrange a la diferencia $\varphi(x_0) - \varphi(x_{n-1})$:

$$\varphi(x_0) - \varphi(x_{n-1}) = (x_0 - x_{n-1}) \cdot \varphi' [x_{n-1} + \Theta_n(x_0 - x_{n-1})]$$

y pongamos:

$$\varphi' [x_{n-1} + \Theta_n(x_0 - x_{n-1})] = \beta_n$$

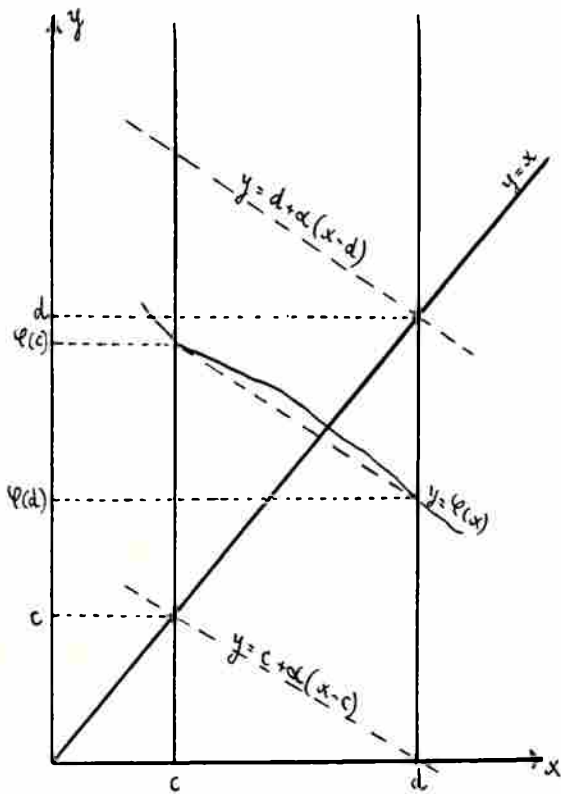


FIG. 11

Podemos entonces escribir:

$$x_0 - x_n = \frac{(x_0 - x_{n-1})(\beta_n - \alpha)}{1 - \alpha} \quad [11]$$

De donde:

$$|x_0 - x_n| = |x_0 - x_{n-1}| \cdot \frac{|\beta_n - \alpha|}{|1 - \alpha|} \quad [12]$$

Supongamos ahora que la función $\varphi(x)$ es monótona en el intervalo $[c; d]$, y marquemos con a y b dos cotas inferior y superior del módulo de su derivada en este intervalo; vale decir, dos números que satisfacen las desigualdades:

$$0 \leq a \leq |\varphi'(x)| \leq b$$

Entonces se cumple la desigualdad:

$$|x_0 - x_n| \leq |x_0 - x_{n-1}| \cdot \frac{b-a}{|1-\alpha|}$$

y las desigualdades sucesivas:

$$\begin{aligned} |x_0 - x_2| &\leq |x_0 - x_1| \cdot \frac{b-a}{|1-\alpha|} \\ |x_0 - x_3| &\leq |x_0 - x_2| \cdot \frac{b-a}{|1-\alpha|} \leq |x_0 - x_1| \cdot \frac{(b-a)^2}{|1-\alpha|^2} \\ |x_0 - x_4| &\leq |x_0 - x_1| \cdot \frac{(b-a)^3}{|1-\alpha|^3} \\ &\vdots \\ |x_0 - x_n| &\leq |x_0 - x_1| \cdot \frac{(b-a)^n}{|1-\alpha|^n} \end{aligned} \quad [13]$$

Si suponemos ahora, como última condición, que en el intervalo $[c; d]$:

$$b-a < |1-\alpha| \quad [14]$$

podremos afirmar que la sucesión $\{x_n\}$ tiende al valor x_0 .

La rapidez de la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ es tanto mayor cuanto menores oscilaciones experimenta la función $|\varphi'(x)|$ comparada con el módulo de la diferencia $(1-\alpha)$ en el intervalo $[c; d]$. De aquí resulta que, por ejemplo, si α tiene un valor muy cercano a 1 entonces, para la aplicabilidad del método descrito, basta que la curva $y = \varphi(x)$ se aproxime a una recta.

Apliquemos este método a la resolución de la ecuación siguiente:

$$x^2 = 200 - \frac{(100 + x^2)^{2.5}}{2 \cdot (10\sqrt{3} - x)^3} \quad [15]$$

Esta ecuación se presenta, por ejemplo, en la determinación de los puntos de anulación del campo newtoniano entre tres masas unitarias ubicadas en los vértices del triángulo equilátero cuyo lado es igual a 20.

Busquemos la raíz próxima a 7,32.

La iteración usual falla en este caso. En efecto, se puede escribir esta ecuación de las tres maneras siguientes:

$$a) \quad x = \pm \sqrt{200 - \frac{(100 + x^2)^{2.5}}{2(10\sqrt{3} - x)^3}} \quad [16 a]$$

$$b) \quad x = 10 \cdot \sqrt{3} - \sqrt[3]{\frac{(100 + x^2)^{2.5}}{400 - 2x^2}} \quad [16 b]$$

$$c) \quad x = \pm \sqrt{[2(10 \cdot \sqrt{3} - x)^3 \cdot (200 - x^2)]^{0.4} - 100} \quad [16 c]$$

En el primer caso, obtenemos los siguientes valores de los primeros tres términos de la sucesión de iteración:

$$x_1 = 7,32 \quad x_2 = 7,3392 \quad x_3 = 7,23056,$$

en el segundo:

$$x_1 = 7,32 \quad x_2 = 7,3264 \quad x_3 = 7,31919$$

y en el tercero:

$$x_1 = 7,32 \quad x_2 = 7,3293 \quad x_3 = 7,312525.$$

En los tres casos ocurren entonces las desigualdades siguientes:

$$x_3 < x_1 < x_2$$

y simultáneamente:

$$x_2 - x_1 < x_2 - x_3.$$

Esto nos sugiere la idea de que todos estos casos corresponden al tipo 7.

Apliquemos entonces el método descripto partiendo, por ejemplo, de la forma [16b]. Para determinar el intervalo $[c; d]$ podemos servirnos de los valores ya calculados:

$$x_1 = 7,32; x_2 = 7,3264; x_3 = 7,3192.$$

Suponiendo encontrarnos en el caso [7] busquemos la raíz x_0 incluida entre los valores x_1 y x_2 . Substituimos entonces:

$$c = 7,32; d = 7,3264; \varphi(c) = 7,3264; \varphi(d) = 7,3192 \text{ (fig. 12).}$$

De donde:

$$\frac{\varphi(d) - \varphi(c)}{d - c} = -\frac{9}{8}$$

es decir

$$\alpha = -\frac{9}{8}$$

Como primera aproximación utilicemos directamente $x = 7,32$, y entonces obtendremos:

$$x_2 = \frac{\varphi(7,32) + 9/8 \cdot 7,32}{1 + 9/8} = 7,32301$$

$$x_3 = \frac{\varphi(7,32301) + 9/8 \cdot 7,32301}{17/8}$$

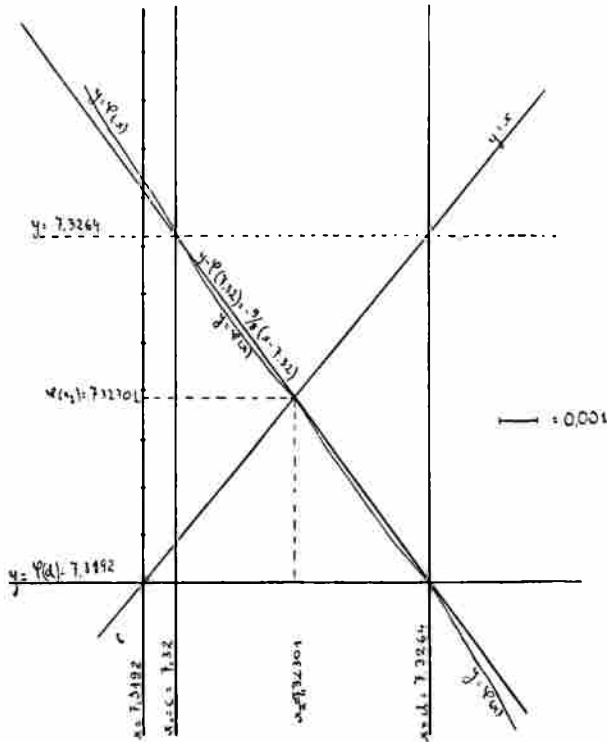


FIG. 12

Pero como

$$\varphi(7,32301) = 7,32301$$

deducimos que ya la segunda aproximación es tan precisa que utilizando loragitmos de 6 cifras decimales no se conseguiría una aproximación más exacta.

Pasemos ahora al caso de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{aligned}f_1(x, y) &= 0 \\f_2(x, y) &= 0.\end{aligned}$$

Supongamos que las podemos presentar de manera unívoca en la forma:

$$\begin{aligned}x &= \varphi(x, y) \\y &= \psi(x, y)\end{aligned}$$

También en este caso podemos dar interpretación geométrica de la iteración usual.

Imaginémonos dos superficies Z_1 y Z_2 cuyas ecuaciones sean las siguientes:

$$z = \varphi(x, y) \quad \text{y} \quad z = \psi(x, y) \quad (\text{fig. 13})$$

Marquemos con x_0 e y_0 el par de valores que satisface el sistema dado de ecuaciones. Determinar este par de valores significa geométricamente encontrar la recta

$$\begin{aligned}x &= x_0 \\y &= y_0\end{aligned}$$

que cortaría la superficie Z_1 en el punto en el cual

$$\varphi(x_0, y_0) = x_0$$

y que, simultáneamente, cortaría la superficie Z_2 en el punto en el cual

$$\psi(x_0, y_0) = y_0.$$

Todos los puntos del espacio para los cuales

$$x = \varphi(x, y)$$

pertenecen a la curva k_x de la intersección de la superficie Z_1 con el plano $z = x$. Igualmente, todos los puntos para los cuales

$$y = \psi(x, y)$$

pertenecen a la curva k_y de la intersección de la superficie Z_2 con el plano $y = z$.

La solución de las ecuaciones dadas consiste entonces en hallar una recta normal al plano XOY , que corte simultáneamente a las dos curvas k_x y k_y .

Designemos estos puntos de intersección por A_x y A_y respectivamente; sus coordenadas son entonces.

$$[x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0)]$$

y

$$[x_0, y_0, \psi(x_0, y_0)]$$

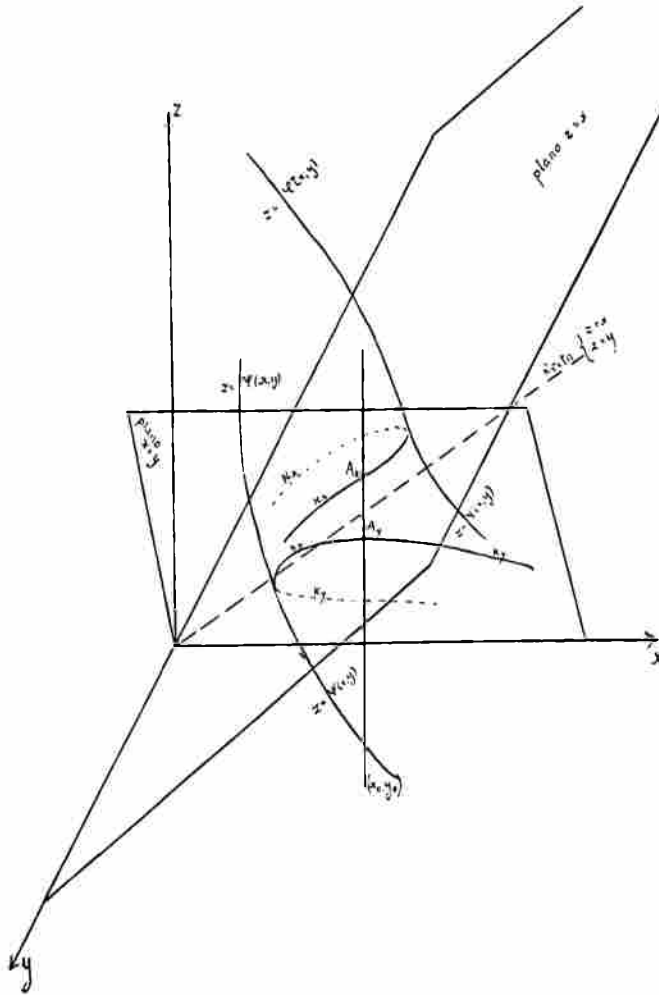


FIG. 13

Geométricamente el procedimiento de la iteración usual es el siguiente:

Partimos del punto $(x_1, y_1, 0)$. La recta paralela al eje OZ que pasa por este punto corta a la superficie Z_1 en el punto cuya

coordenada z es igual a $\varphi(x_1, y_1)$ y a la superficie Z_2 en el punto cuya coordenada z es igual a $\psi(x_1, y_1)$.

El plano

$$z = \varphi(x_1, y_1)$$

corta al plano $z = x$ a lo largo de la recta L_1 paralela al eje OY y el plano

$$z = \psi(x_1, y_1)$$

corta al plano $z = y$ a lo largo de la recta $\bar{L}_1$ paralela al eje OX . El punto de intersección de las proyecciones de las rectas L_1 y $\bar{L}_1$ sobre el plano XOY constituye una nueva aproximación. Se sabe que (C. Runge und H. König, « Numerisches Rechnen ») si en la proximidad del punto (x_0, y_0) se cumplen simultáneamente las dos desigualdades

$$|\varphi'_x| + |\psi'_x| < \kappa < 1$$

y

$$|\varphi'_y| + |\psi'_y| < \kappa < 1,$$

entonces la sucesión de aproximaciones así obtenida tiende al punto (x_0, y_0) .

Independientemente de si las desigualdades arriba citadas se cumplen o no, se puede, bajo ciertas restricciones, aplicar otro método para resolver el sistema de ecuaciones dado.

Llamemos s al entorno rectangular situado en el plano XOY y delimitado por las rectas:

$$x = a$$

$$x = b$$

$$y = c$$

$$y = d$$

donde $a < b$ y $c < d$.

Supongamos que este entorno contenga un solo punto (x_0, y_0) cuyas coordenadas satisfagan el sistema dado.

Designemos por α un cierto valor promedio de la derivada φ'_x en el entorno s y por β un cierto valor promedio de la derivada ψ'_y en ese entorno.

Partimos de un punto (x_1, y_1) del entorno s y consideramos la recta

$$\begin{aligned}x &= x_1 \\y &= y_1\end{aligned}$$

que corta a la superficie Z_1 en el punto que llamaremos M_1 y a la superficie Z_2 en el punto N_1 . Hacemos pasar por el punto M_1 el plano P_1 paralelo al eje OY , cuya ecuación es:

$$z - \varphi(x_1, y_1) = \alpha(x - x_1)$$

y por punto N_1 el plano R_1 paralelo al eje OX , y cuya ecuación es:

$$z - \psi(x_1, y_1) = \beta(y - y_1)$$

El plano P_1 corta al plano $z = x$ a lo largo de una recta cuya proyección sobre el plano XOY tiene por ecuación:

$$x = \frac{\varphi(x_1, y_1) - \alpha \cdot x_1}{1 - \alpha}$$

Análogamente, el plano R_1 corta al plano $z = y$ a lo largo de una recta cuya proyección sobre el plano XOY es la recta:

$$y = \frac{\psi(x_1, y_1) - \beta \cdot y_1}{1 - \beta}$$

El punto (x_2, y_2) de intersección de estas dos proyecciones constituye una nueva aproximación.

Continuando de manera análoga obtenemos la siguiente sucesión de aproximaciones del punto (x_0, y_0) :

$$\begin{aligned}x_n &= \frac{\varphi(x_{n-1}, y_{n-1}) - \alpha \cdot x_{n-1}}{1 - \alpha} \\y_n &= \frac{\psi(x_{n-1}, y_{n-1}) - \beta \cdot y_{n-1}}{1 - \beta}\end{aligned}$$

Determinaremos las condiciones en las cuales la sucesión de pares (x_n, y_n) tiende hacia el par (x_0, y_0) .

Supongamos primeramente que la parte de la superficie $z = \varphi(x, y)$ correspondiente al contorno s no exceda la capa delimitada por los dos planos:

$$\begin{aligned}z - a &= \alpha(x - a) \\z - b &= \alpha(x - b)\end{aligned}$$

y que la parte de la superficie $z = \psi(x, y)$ correspondiente al mismo entorno no exceda la capa delimitada por los dos planos:

$$z - c = \beta (y - c)$$

$$z - d = \beta (y - d)$$

Cumplidas estas condiciones evidentemente todos los puntos (x_i, y_i) no exceden el entorno s .

Calculemos la diferencia

$$x_0 - x_n = x_0 - \frac{\varphi(x_{n-1}, y_{n-1}) - \alpha \cdot x_{n-1}}{1 - \alpha}$$

Dado que

$$x_0 = \varphi(x_0, y_0)$$

podemos escribir

$$x_0 - x_n = \frac{\varphi(x_0, y_0) - \varphi(x_{n-1}, y_{n-1}) - \alpha(x_0 - x_{n-1})}{1 - \alpha}.$$

Supongamos que en la región s existan las derivadas φ_x' y φ_y' . Podemos entonces aplicar el teorema de Lagrange:

$$\begin{aligned} x_0 - x_n &= \frac{(x_0 - x_{n-1}) \cdot \varphi_x' \{ [x_{n-1} + \Theta(x_0 - x_{n-1})], y_0 \}}{1 - \alpha} + \\ &+ \frac{(y_0 - y_{n-1}) \cdot \varphi_y' \{ x_{n-1}, [y_{n-1} + \Theta_1(y_0 - y_{n-1})] \}}{1 - \alpha} - \alpha(x_0 - x_{n-1}) \end{aligned}$$

o brevemente:

$$\begin{aligned} x_0 - x_n &= \frac{(x_0 - x_{n-1}) \cdot \varphi_x' + (y_0 - y_{n-1}) \cdot \varphi_y' - \alpha(x_0 - x_{n-1})}{1 - \alpha} = \\ &= \frac{(x_0 - x_{n-1})(\varphi_x' - \alpha) + (y_0 - y_{n-1}) \cdot \varphi_y'}{1 - \alpha} \end{aligned}$$

de donde

$$|x_0 - x_n| \leq \frac{|x_0 - x_{n-1}| \cdot |\varphi_x' - \alpha| + |y_0 - y_{n-1}| \cdot |\varphi_y'|}{|1 - \alpha|} \quad [17]$$

Suponiendo que en la región s existan las derivadas ψ'_x y ψ'_y se puede llegar a una desigualdad análoga:

$$|y_0 - y_n| \leq \frac{|y_0 - y_{n-1}| \cdot |\psi'_y - \beta| + |x_0 - x_{n-1}| \cdot \psi'_x}{|1 - \beta|} \quad [18]$$

Supongamos ahora que cada una de las derivadas mencionadas conserve en el entorno s signo constante, e introduzcamos los símbolos siguientes:

$$\begin{array}{llllllll} a_1 \text{ y } a_2 & \text{para las cotas inferior y superior de } |\varphi'_x| & \text{en el entorno } s' \\ b_1 \text{ y } b_2 & \text{» » » » » » » } |\varphi'_y| & \text{» » » » } \\ c_1 \text{ y } c_2 & \text{» » » » » » » } |\psi'_x| & \text{» » » » } \\ d_1 \text{ y } d_2 & \text{» » » » » » » } |\psi'_y| & \text{» » » » } \end{array}$$

Tenemos entonces las desigualdades siguientes:

$$\begin{aligned} 0 &\leq a_1 \leq |\varphi'_x| \leq a_2 \\ 0 &\leq b_1 \leq |\varphi'_y| \leq b_2 \\ 0 &\leq c_1 \leq |\psi'_x| \leq c_2 \\ 0 &\leq d_1 \leq |\psi'_y| \leq d_2 \end{aligned}$$

Podemos ahora reemplazar las desigualdades [17] y [18] por las siguientes:

$$\begin{aligned} |x_0 - x_n| &\leq |x_0 - x_{n-1}| \frac{a_2 - a_1}{|1 - \alpha|} + |y_0 - y_{n-1}| \frac{b_2}{|1 - \alpha|} \\ |y_0 - y_n| &\leq |y_0 - y_{n-1}| \frac{d_2 - d_1}{|1 - \beta|} + |x_0 - x_{n-1}| \frac{c_2}{|1 - \beta|} \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} |x_0 - x_n| + |y_0 - y_n| &\leq |x_0 - x_{n-1}| \left(\frac{a_2 - a_1}{|1 - \alpha|} + \frac{c_2}{|1 - \beta|} \right) + \\ &+ |y_0 - y_{n-1}| \left(\frac{b_2}{|1 - \alpha|} + \frac{d_2 - d_1}{|1 - \beta|} \right) \quad [19] \end{aligned}$$

Si admitiremos que existe una fracción positiva $K < 1$, para la cual se verifican las desigualdades:

$$\frac{a_2 - a_1}{|1 - \alpha|} + \frac{c_2}{|1 - \beta|} < K$$

y

$$\frac{b_2}{|1 - \alpha|} + \frac{d_2 - d_1}{|1 - \beta|} < \kappa$$

podremos escribir:

$$|x_0 - x_n| + |y_0 - y_n| < \kappa (|x_0 - x_{n-1}| + |y_0 - y_{n-1}|)$$

de donde resulta:

$$|x_0 - x_n| + |y_0 - y_n| < \kappa^{n-1} (|x_0 - x_1| + |y_0 - y_1|)$$

lo que significa que la sucesión de pares (x_i, y_i) tiende hacia el par (x_0, y_0) .

La generalización de este método para el caso de n ecuaciones de n ($n \geq 3$) incógnitas no presenta dificultades teóricas.

PUBLICACIONES DE LA FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS

a partir de enero de 1939

SERIE PRIMERA. — Informaciones generales.

1. Anuario 1938-39, mayo 1939	(Nº 120)	\$ 1.50
agosto de 1939	(Nº 124)	Gratis
2. Inauguración de la ampliación del laboratorio de Ensayo de Materiales,		
3. Laboratorio de ensayo de materiales, agosto de 1940	(Nº 131)	»
4. Escuela del Motor	(Nº 132)	»
5. Elección de autoridades y acto de transmisión del decanato	(Nº 135)	»
6. Anuario 1941	(Nº 145)	\$ 2.00
7. Entrega de publicaciones en acto público por el señor Embajador de		
Gran Bretaña, Sir Esmond Ovey, el día 6 de octubre de 1941	(Nº 148)	Gratis
8. Digesto 1942	(Nº 149)	\$ 2.00
9. Disposiciones de interés para los estudiantes, 1942	(Nº 153)	\$ 1.00
10. Anuario 1942	(Nº 156)	\$ 2.00
11. Planes de Estudio	(Nº 160)	\$ 0.30
12. Departamento de Mecánica	(Nº 163)	\$ 2.00
13. Instituto de Aeronáutica	(Nº 164)	Gratis
14. Programas de examen, 1943	(Nº 165)	\$ 1.50
15. Programas de ingreso	(Nº 170)	\$ 4.00
16. Elección de autoridades y acto de toma de posesión del decanato, 1945 ..	(Nº 183)	Gratis
17. Ordenanza general de ingreso y programas de los cursos preparatorios ..	(Nº 186)	\$ 4.00
18. Ordenanza general de ingreso y programas de los cursos preparatorios ..	(Nº 193)	\$ 4.00

SERIE SEGUNDA. — Revista y Contribuciones.

1. Trabajos de los ingenieros M. Simonoff y E. A. Arnaboldi. Mayo de 1939	(Nº 121)	\$ 2.40
2. Trabajos de los doctores R. G. Loyarte, J. Pláceres, F. Charola, R. F.		
Recorder, R. P. Cesco y A. E. Sagastume Berra. Enero de 1940	(Nº 127)	\$ 2.40
3. Trabajos del doctor P. Montel y de los ingenieros J. S. Gandolfo y M.		
Simonoff. Abril de 1940	(Nº 128)	\$ 2.40
4. Trabajos de los doctores A. Durañona y Vedia y G. Knie y de los inge-		
nieros J. S. Gandolfo y A. Dorfman. Octubre de 1940	(Nº 136)	\$ 2.00
5. Trabajos de los ingenieros A. Gray y R. Martínez de Vedia y del doctor		
E. Sábato. Diciembre de 1940	(Nº 139)	\$ 3.00
6. Trabajos de los doctores R. G. Loyarte, R. Carratalá, D. Vucetich, B.		
Gross, G. García e ingeniero E. Dickmann. Abril de 1941	(Nº 143)	\$ 3.00
7. Trabajos de los doctores A. Durañona y Vedia, A. E. Sagastume Berra		
y R. P. Cesco y de los ingenieros E. A. Arnaboldi y F. F. Langmann.		
Diciembre de 1941	(Nº 150)	\$ 3.00
8. Trabajos del doctor A. E. Sagastume y Berra, y de los ingenieros A.		
Escudero y E. A. Arnaboldi, R. Martínez de Vedia y A. Dorfman	(Nº 161)	\$ 4.00
9. Trabajos de los doctores R. J. Ambrosio, F. Vierheller, Antero Bueno,		
A. E. Sagastume Berra y E. Castellano, y del ingeniero F. F. Lang-		
mann. — Bibliografía	(Nº 168)	\$ 4.00
10. Trabajos de los ingenieros A. R. Gray, J. S. Gandolfo, C. Di Corleto, M.		
Mesny, y doctores Pasqualini, F. Vierheller y A. Bueno	(Nº 173)	\$ 4.00
11. Trabajos de los ingenieros C. Di Corleto, J. A. Brochiero, R. Dupeyron, y		
doctores A. F. Sagastume Berra, R. J. Ambrosio, Rodríguez y Balseiro		
12. Trabajos de los ingenieros E. Mallol, Juan A. Brochiero, Simón A. Del-		
pech y señor Mario Bunge	(Nº 177)	\$ 2.00
13. Trabajos de los ingenieros O. Delfino, J. J. Ré, M. Mesny y E. Mallol ..	(Nº 179)	\$ 3.00
14. Contribuciones de los doctores R. Grinfeld, R. Cesco, J. C. Vignaux y F.		
Vierheller	(Nº 180)	\$ 4.00
15. Trabajos de los ingenieros S. A. Delpech y L. E. Barretto, M. Simonoff,		
doctor R. P. Cesco y señor Ralph Palmer Agnew	(Nº 188)	\$ 4.00
16. Trabajos de los ingenieros J. P. Lombardi, C. M. Gadda, R. Gans, G.		
Valirán, A. Sturla y E. Castellano, C. J. Luisoni	(Nº 192)	\$ 5.00
17. Trabajos de los doctores Ricardo Gans, J. A. Balseiro, Alfredo L. Mercan-		
der, R. P. Cesco, H. A. Cattaneo e ingenieros Adolfo P. Grisi y José P.		
Lombardi	(Nº 195)	\$ 5.00
18. Trabajos de los ingenieros Arturo M. Guzmán, César J. Luisoni, Juan		
Sabato, Alberto Bilotti y de los doctores Ricardo Gans, Alfredo Mercan-		
der y Efraín B. Pezo	(Nº 196)	\$ 6.00
19. Trabajo de los doctores A. Sagastume Berra, Carlos Biggeri e ingenieros		
Clodoveo Pasqualini, Nicolás Krivoshein y Enzo O. Macagno	(Nº 199)	\$ —
20. Trabajos de los ingenieros Arturo M. Guzmán y César J. Luisoni (Sep.		
1), del Dr. Luis A. Santaló (Sep. 2) y del Dr. Germán Fernández (Sep.		
3), Vol. IV (Nº 5)	(Nº 200)	\$ 15.00
21. Trabajos del Dr. Pedro Pi Callejas (Sep. 1) del Ing. Agripino R. Spamp-		
pinato (Sep. 2) de los doctores Antonio Rodríguez y Horacio Santa		
María (Sep. 3) del Dr. Alberto Sagastume Berra (Sep. 4), Vol. V (Nº 1)		
22. Trabajo del ingeniero Agripino Spampinato (Sep. 1). Trabajo del Dr.		
Pedro H. Brodersen (Sep. 2), Vol. V (Nº 2)	(Nº 212)	\$ —
23. Trabajos de los doctores Mischa Cotlar y R. Ricabarra, Orlando E. Villa-		
mayor, E. R. Gentile, J. E. Bosch y María Buschi	(Nº 213)	\$ —
24. Trabajo del Ing. F. M. Langmann y Trabajo de la Doctora Rebeca Cherep		
25. Trabajo del Dr. Georges Dedebant y del Ing. P. Marcellé	(Nº 215)	\$ —
	(Nº 216)	\$ —

SERIE TERCERA. — Publicaciones Especiales.

*. Saneamiento urbano en la República Argentina. Primera parte. Provisión de agua. Cuaderno N° 4 por el ingeniero E. Artaza. Junio de 1939	(N° 122)	\$ 3.80
1. Conmemoración de la Independencia nacional (julio 1938), julio 1939....	(N° 123)	Gratis
*. Tercera Reunión Anual de Caminos. Conferencias de los ingenieros T. Sánchez de Bustamante, V. Carri, J. Zuker, A. P. Grisli, A. Kashirski, C. K. Preus, N. Alurralde, M. Fornari, E. Arenas, J. Boiso y doctor A. Zanetta. Septiembre 1939	(N° 125)	\$ 10.00
2. Estudio de la evolución fluvial que determina el endicamiento del río San Juan, por el ingeniero J. S. Gandolfo. Enero 1940	(N° 126)	\$ 4.00
3. Conmemoración de la Independencia nacional (julio 1939), abril 1940....	(N° 129)	Gratis
*. Física General. Tomo IV, segunda edición, por el doctor R. G. Loyarte....	(N° 130)	\$ 20.00
4. Lista de Publicaciones. Agosto 1940	(N° 133)	Gratis
*. Saneamiento urbano en la República Argentina. Primera parte. Provisión de agua, por el ingeniero E. Artaza. Cuaderno N° 5. Septiembre 1940....	(N° 134)	\$ 5.00
5. Cuarta Reunión Anual de Caminos (I). Discurso Inaugural del doctor H. Magliano. Conferencias de los ingenieros A. Lodelro Blanco, A. J. L. Bolognesi, A. M. Podestá, E. F. Togle, V. Carri y J. L. Carrittino.....	(N° 137)	\$ 5.00
6. Cuarta Reunión Anual de Caminos (II). Conferencias de los Ingenieros P. Palazzo, E. Arenas y A. Kashirski	(N° 138)	\$ 5.00
7. Cálculo de Estructuras de Hormigón Armado, por el ingeniero J. Zuker	(N° 140)	\$ 6.00
8. Saneamiento urbano en la República Argentina, Tercera parte. Obra domiciliaria. Tomo I, por el ingeniero E. Artaza. Abril de 1941	(N° 141)	\$ 20.00
9. Física general. Tomo I, cuarta edición, por el doctor R. G. Loyarte. Abril de 1941	(N° 142)	\$ 15.00
10. La viga plana, por J. J. Montú	(N° 144)	\$ 4.00
11. Determinación de detonancia de combustibles y carburantes	(N° 146)	\$ 3.00
12. La Anisotropía óptica por deformación elástica de los medios transparentes y su aplicación a la Fotoelasticimetría, por el ingeniero R. Buich	(N° 147)	\$ 8.00
13. Sistemas hiperestáticos planos, por el ingeniero F. De Medina	(N° 151)	\$ 6.00
14. Vigas de hormigón armado con armadura doble simétrica sometidas a flexión compuesta, por el ingeniero J. R. Castilleiras	(N° 152)	\$ 1.00
15. Producción, transporte y distribución de la energía eléctrica, por el ingeniero M. Simonoff	(N° 154)	\$ 25.00
16. El proyecto económico de estructuras de hormigón armado, por el ingeniero J. R. Castilleiras	(N° 155)	\$ 5.00
17. Física general. Tomo II, tercera edición, por el doctor R. G. Loyarte....	(N° 157)	\$ 15.00
18. Tablas para vigas con chanchos rectos y parabólicos, para facilitar la resolución de sistemas hiperestáticos, por los Ingenieros G. A. Rabuffetti y E. A. Arnaboldi	(N° 158)	\$ 2.00
19. Quinta Reunión Anual de Caminos. Discurso Inaugural del ingeniero J. R. Castilleiras. Conferencias de los doctores C. L. Ruiz y E. Petroni, agrimensor L. de Carli, Ingenieros A. P. Grisli, J. Zuker, A. M. Podestá, E. F. Togle, E. Arenas, A. Kashirski, M. A. Fornari. Ingeniero agrónomo A. Arena e ingeniero J. J. Font	(N° 159)	\$ 10.00
20. Saneamiento urbano en la República Argentina. Primera parte. Provisión de agua, por el ingeniero E. Artaza. Cuaderno N° 6. Febrero 1943.	(N° 162)	\$ 15.00
21. Física general. Tomo III - Calor, tercera edición, por el doctor R. G. Loyarte	(N° 166)	\$ 15.00
22. Electricidad. — I. Electricidad y magnetismo. — II. Electricidad corpuscular, por el ingeniero M. Simonoff	(N° 167)	\$ 18.00
23. Saneamiento urbano en la República Argentina. Segunda parte. Desagües urbanos por el ingeniero E. Artaza. Cuaderno N° 1. Noviembre 1943.	(N° 169)	\$ 4.00
24. Semejanza Mecánica, por el ingeniero C. Berta	(N° 171)	\$ 4.00
25. Aceros y Tratamientos térmicos, por el ingeniero A. Lodelro Blanco....	(N° 172)	\$ 4.00
26. Carburantes, Combustibles y Lubricantes. Ensayos Normales, por los Asistentes Dr. E. Castellano e Ing. M. Mesny, del Departamento de Mecánica	(N° 175)	\$ 3.00
27. Física General. Tomo IV, quinta edición, por el doctor R. G. Loyarte, Junio de 1944	(N° 176)	\$ 18.00
28. Tratado de Óptica. 1er. Fascículo, por el doctor E. Lodelro Palumbo....	(N° 178)	\$ 7.00
29. Aurel Stodola a través de sus Libros, por el Ingeniero Emilio Mallol....	(N° 181)	\$ 0.50
30. Trigonometría, por el ingeniero Numa Tapia	(N° 182)	\$ 25.00
31. Discursos pronunciados en el homenaje a la memoria del ingeniero Julio R. Castilleiras	(N° 194)	Gratis
32. Discurso pronunciado por el Sr. Vice Presidente de la Universidad Ingeniero A. uiles Martínez Clivelli, en el acto de la reapertura de la Universidad, el día 25 de Octubre de 1945	(N° 185)	Gratis
34. Introducción a la Matemática Superior, por el Dr. A. Sagastume Berra. Noviembre de 1946	(N° 189)	\$ 25.00
36. El Rincuelo, sus puentes y las obras a encarar en el próximo quinquenio, por el Ing. José Negri. Abril de 1947	(N° 191)	\$ 3.00
37. Física General - Tomo III - Cuarta edición, por el Dr. R. G. Loyarte....	(N° 194)	\$ 18.00
38. Elasticidad y Plasticidad. Placas Planas, por los Ingenieros Arturo M. Guzmán y César Luksoni. Enero 1950	(N° 197)	\$ 12.50
39. Reconocimiento Trigonométrico de I y II orden. Construcción de Torres y Marcas Geodésicas, por el Ingeniero Heliodoro Negri. Enero 1950.....	(N° 198)	\$ 20.00
40. La Determinación de la forma de las Figuras en la Triangulación Fundamental Argentina, por el Ingeniero Heliodoro Negri	(N° 201)	\$ 5.00
41. Aplicaciones de una Calculadora Analógica Electrónica, por el Ingeniero Plácido Cicala	(N° 202)	\$ 5.00

41 bis. Un Mensaje Plástico para la Arquitectura	(Nº 203) \$ 5.00
42. Consideraciones sobre la lluvia artificial, por los Ingenieros G. Dedeant y R. Di Majo	(Nº 204) \$ 5.00
43. Breve reseña histórica del Departamento de Aeronáutica; Sobre la flexión de placas oblicuas. Hacia una nueva termodinámica de la atmósfera. Aplicación del método de iteración de Ricard-Lindelof para la resolución de ecuaciones diferenciales. Distribución de la sustentación con diagrama lineal. Tensiones de cierre óptimo de un cosquillo de cojinete. Efecto del viento en la trayectoria activa de un cohete. Fórmulas prácticas para la Integración numérica	(Nº 206) \$
43 bis. Sobre el cálculo de las frecuencias propias y formas de oscilación. Un método para determinar características de perfiles alares. Matrices para el cálculo de la distribución simétrica de la sustentación por el método de Pasqualini. Estudio sobre las deformaciones de una lámina de espesor variable	(Nº 206 bis)
44. Tracción por locomotoras a vapor, por el Ing. Carlos Ponsatl	(Nº 207) \$ —
45. Sobre imanes permanentes, por L. Costa Long	(Nº 208) \$ —
46. Determinación de latitud y corrección del reloj por el método de Gauss y los problemas que plantea la observación, Agrim. Juan E. Ferenza	(Nº 209) \$ —
47. Sobre los conceptos de energía utilizable de un sistema y de efectividad térmica de un ciclo o una transformación, por el Ing. Carlos García	(Nº 210) \$ —
48. Sobre la función aleatoria $X(t) = K(t, S) d(S)$, por el Dr. Emilio Machado	(Nº 211) \$ —
49. Estudio del fenómeno de desgaste y medio de evitarlo con soldadura eléctrica, por el Ing. Vladimiro Vilham	(Nº 214) \$ —
50. Derivación de agua de los Ríos. - Obra-tipo sin ingreso de arrastre, por el Ing. José S. Gandolfo	(Nº 217) \$ —

Se enviará sin cargo, a quien lo solicite, la "Lista de Publicaciones", que contiene la nómina completa de publicaciones de la Facultad.

Se terminó de imprimir el 10 de diciembre de 1958, en los
Tall. Gráf. « Palumbo », Lamadrid 811-25, Buenos Aires.

**PUBLICACIONES DE LA
FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS**

Las publicaciones oficiales de la Facultad se dividen en las tres series siguientes:

SERIE PRIMERA. — *Informaciones generales*

Esta serie comprende:

- a) el *Anuario*, que se publicará cada dos años, con informaciones relativas a las leyes, decretos, ordenanzas del Consejo superior que afecten a la Facultad y las del Consejo académico de la misma y resoluciones del decano de interés general, organización general de la Facultad, carreras que se cursan en ella, planes de estudio, programas de las materias, autoridades y personal docente, etc.
- b) Informaciones sobre la organización y evolución de sus institutos, departamentos, laboratorios, gabinetes, etc.
- c) Ampliaciones de sus edificios, publicando planos, fotografías, presupuestos, partidas acordadas en el presupuesto nacional, donaciones, etc.
- d) Movimiento del personal docente y datos sobre el mismo, visitas realizadas por personas destacadas, etc.
- e) Informes sobre elecciones de autoridades y asambleas de profesores. Discursos académicos.
- f) Noticias sintéticas de carácter general sobre actos de instituciones similares nacionales y extranjeras.

SERIE SEGUNDA. — *Revista y Contribuciones*

Esta serie que es continuación de las series matemática, física y técnica, publicadas hasta el 31 de diciembre de 1938, con el título principal «Contribución al estudio de las ciencias físicas y matemáticas», comprende:

- a) La «Revista» de la Facultad de ciencias fisicomatemáticas, con trabajos de índole técnico-científica de su personal docente, orientados en primer lugar a las necesidades de la enseñanza y su vinculación con la industria nacional.
- b) Las «Contribuciones» al estudio de las ciencias físicas y matemáticas, con trabajos y conferencias de índole científica de los miembros del personal docente de la Facultad o de personas extrañas al mismo, que el Consejo académico o el Director de publicaciones resuelva publicar, agrupados en concordancia con la organización general de la Facultad.

La «Revista» se publicará cada dos meses y las «Contribuciones» a medida que se acumule el material necesario para su número.

SERIE TERCERA. — *Publicaciones especiales*

Esta serie comprende:

- a) Publicaciones especiales.
- b) Textos generales.
- c) Publicaciones didácticas.

Las publicaciones llevarán una numeración general siguiendo la de las anteriores de la Facultad por orden cronológico, de acuerdo con la fecha en que se termine la impresión.

Además, cada serie llevará en el mismo orden la numeración especial que le corresponda. Esta numeración se inicia en el año 1939.

En todos los originales y publicaciones respectivas correspondientes a la segunda serie se hará constar la fecha de entrega a la Comisión para ser impresos.

ADVERTENCIA

Con el fin de evitar extravíos en la correspondencia, rogamos que se nos hagan los envíos a la siguiente dirección:

Facultad de Ciencias Fisicomatemáticas

Comisión de Publicaciones

**Av. 1 esq. 47. — LA PLATA
República Argentina**